PRINCIPIOS GENERALES

DE

MECÁNICA,

PARA LA ENSEÑANZA EN LOS INSTITUTOS
Y COLEGIOS DE CENTRO AMERICA.

POR EL DR. DARÍO GONZALEZ.

Obra adoptada como texto en varios establecimientos.

2ª EDICION CORREGIDA Y AUMENTADA.

GUATEMALA.
TIPOGRAFIA "EL PROGRESO."—OCTAVA CALLE PONIENTE N.º 6 BIS.
1882.

A MI AMIGO

el Doctor Santos Toruño,

DIRECTOR DEL INSTITUTO NACIONAL DE GUATEMALA.

Vuestros esfuerzos como educacionista en favor de la juventud centro-americana, constituyen un título mas para que vuestro nombre sea respetado por los amantes de las luces.

El autor.

INTRODUCCION.

Antes de entrar en la exposicion de los principios de Mecánica, es conveniente dar una idea sucinta de las propiedades generales de la materia.

§ 1.—Nociones preliminares.

1. **Materia.**—Se da el nombre de *materia* á todo lo que puede afectar nuestros sentidos.

Se admiten dos clases de materia: *ponderable* é *imponderable.* Todo lo que tiene un peso apreciable, como el oro, el agua, el aire, etc., se llama materia ponderable. La materia imponderable es una materia sutil, esparcida en todo el Universo, aun entre las moléculas de los cuerpos y en el vacío mas perfecto, causa única de los fenómenos del calor, luz y electricidad. Esta materia se llama *éter.*

Antes se creía que el calor, la luz y la electricidad eran materias imponderables diferentes; y por

esta razon se les daba el nombre de *agentes físicos.*

2. Cuerpo, masa.—*Cuerpo* es una porcion de la materia, limitida en todos sentidos.

Masa es la cantidad de materia que un cuerpo contiene. Adelante se dará una definicion matemática de la masa.

Los cuerpos estan compuestos de un conjunto de partes excesivamente pequeñas que se llaman *átomos*, es decir, indivisibles. La reunion de varios átomos constituye una *molécula*, divisible solamente por las acciones químicas. La reunion de muchas moléculas forma un *cuerpo.* Los átomos y las moléculas son invisibles aun al microscopio.

Las diferentes moléculas de que constan los cuerpos estan mas ó ménos íntimamente ligadas entre sí por una fuerza especial; de otro modo, se nos presentarian bajo forma de un polvo impalpable, ó mejor dicho, no tendrian una forma determinada. Esta fuerza molecular se conoce con el nombre de *cohesion*, y tiene por antagonista la fuerza llamada *repulsion*, en virtud de la cual las moléculas de los cuerpos tienden á separarse. La causa mas activa de la repulsion es el calor.

3. Estados de los cuerpos.—Los cuerpos se presentan bajo tres estados diferentes: *sólido*, *líquido* y *gaseoso.*

1.° Al estado sólido, las moléculas de los cuerpos estan fuertemente unidas entre sí, de tal manera que no pueden separarse sinó por un esfuerzo mas ó ménos considerable: las piedras, los metales, las maderas, etc., son cuerpos sólidos. De aquí resulta, que los sólidos conservan por sí mismos la figura ó forma que la naturaleza ó el arte les ha dado.

2.° Al estado líquido, las moléculas de los cuerpos

estan débilmente unidas entre sí, de modo que no tienen suficiente fuerza para resistir á un cambio de forma por su propio peso, y el menor esfuerzo basta para separarlas: el agua, el alcohol, los aceites, etc., son líquidos. Si se vierte un poco de agua sobre un plano, se extiende en virtud de su propio peso. De esto se sigue, que los líquidos no conservan otra forma que la de los recipientes que los contienen.

3. ° Al estado gaseoso, las moléculas de los cuerpos poseen gran movilidad y tienden á separarse constantemente: el aire, el oxígeno, el hidrógeno, etc., son gases. Esta propiedad, por la cual los gases tienden á aumentar indefinidamente de volúmen, se llama *expansibilidad* ó *fuerza elástica* de los gases.

Bajo la denominacion de *fluidos ponderables* se comprenden los líquidos y gases. Los llamados agentes físicos se denominan *fluidos imponderables.*

Muchos cuerpos presentan los tres estados. El agua bajo la forma de hielo, de agua líquida y de vapor, es uno de los ejemplos mas notables.

Si se atiende á las fuerzas moleculares puede decirse: que en los cuerpos al estado sólido la cohesion es mayor que la repulsion; que al estado líquido las dos fuerzas casi se equilibran; y que al estado gaseoso la repulsion es mayor que la cohesion molecular, que llega á ser nula.

4. Division química de los cuerpos. —Los cuerpos se dividen en *simples* y *compuestos.*

Cuerpos simples ó elementos son los que constan de una misma especie de materia, como el oxígeno, el hidrógeno, el hierro, etc.

Cuerpos compuestos son los que resultan de la combinacion de dos ó mas simples, como el agua,

que es una combinacion de dos volúmenes de hidrógeno y uno de oxígeno.

Los cuerpos simples conocidos hasta la fecha son 65 y de ellos está formado nuestro globo y todo cuanto en él existe. La Física moderna, mediante los estudios espectroscópicos, tiende á demostrar idéntica composicion á la del globo en los cuerpos celestes. Es posible que se descubran mas cuerpos simples, y que muchos de los que ahora se tienen por simples sean verdaderos cuerpos compuestos.

5. Fenómenos.—*Fenómeno* es toda modificacion ó cambio sobrevenido en el estado de un cuerpo: la caida de un grave, la reflexion de la luz, la congelacion del agua, etc., son fenómenos. En el lenguage vulgar se da el nombre de fenómeno á todo lo que es extraordinario ó anómalo; en el lenguage científico la idea de fenómeno significa cambio, *manifestacion*, ó un hecho cualquiera que se verifique en la materia.

Los fenómenos de los cuerpos son de tres clases: *físicos*, *químicos* y *orgánicos* ó *vitales*.

1.° Los fenómenos físicos en nada cambian la naturaleza íntima de los cuerpos, pero les dan propiedades ó estados pasageros. Así, el agua puede pasar sucesivamente del estado sólido al líquido y de este al gaseoso ó de vapor; una varilla de vidrio frotada con un pedazo de paño adquiere la propiedad pasagera de atraer los cuerpos ligeros. Estos dos fenómenos en nada cambian la naturaleza íntima del cuerpo.

2.° Los fenómenos químicos cambian profundamente la naturaleza y propiedades de los cuerpos. La combustion de la madera, la oxidacion del hierro, son fenómenos químicos.

3.° Los fenómenos orgánicos ó vitales se observan en las plantas y en los animales. Los seres organizados estan provistos de *órganos* peculiares, propios para su reproduccion, crecimiento y desarrollo. Así, las plantas tienen vasos por donde circula la savia, órganos respiratorios que son las hojas, y un aparato absorvente constituido particularmente por las raices; la flor contiene los órganos de la reproduccion. Los animales, y sobre todo los superiores como el hombre, tienen un aparato digestivo, un aparato absorvente que lleva al torrente circulatorio los materiales de la nutricion, pulmones para la respiracion del aire, sistema nervioso para la trasmision de las sensaciones, órganos de la generacion bien definidos, etc.

Los fenómenos físicos son del resorte de la *Física ó Filosofía Natural.* Esta ciencia puede definirse: *el estudio de los fenómenos que no producen cambios permanentes en la naturaleza de los cuerpos.*

La *Química* se ocupa de los fenómenos que producen cambios permanentes en la naturaleza de los cuerpos.

Los fenómenos orgánicos son el objeto de la *Biología.* El estudio particular de las plantas se llama *Botánica* y el de los animales *Zoología.*

6. Leyes físicas, teoría física.—Los agentes de la naturaleza obran de tal modo que existen relaciones determinadas y constantes entre los fenómenos y sus causas, y estas relaciones se llaman *leyes físicas.* Cuando se dice: todos los cuerpos caen al mismo tiempo en el vacío, se enuncia una ley física.

Un conjunto de leyes físicas relativas á una misma clase de fenómenos, constituye una *teoría física*, como la teoría de la luz, del calor, etc.

§ 2.—Propiedades generales de los cuerpos.

7. **Propiedades de los cuerpos.** — Las diversas maneras con que los cuerpos se presentan á nuestros sentidos constituyen sus *propiedades*. Estas se dividen en *generales* y *particulares.*

Las propiedades generales son comunes á todos los cuerpos en cualquier estado en que se encuentren, y las principales son: *extension*, *impenetrabilidad*, *indestructibilidad*, *divisibilidad*, *porosidad*, *compresibilidad*, *elasticidad*, *dilatabilidad*, *movilidad* é *inercia.*

Las propiedades particulares se observan en ciertos cuerpos ó en determinados estados de los cuerpos, tales son: *tenacidad*, *dureza*, *ductilidad*, *maleabilidad*, *etc.*

8. **Extension.**—La idea de *extension en general* ó la *extension indefinida*, no es otra cosa que la idea de *espacio*, es decir, la concepcion del espíritu que resulta de hacer abstraccion de todos los objetos que nos rodean. La *extension en particular*, es una porcion limitada del espacio. De donde se sigue, que los cuerpos no son extensos sinó por el espacio que ocupan.

Los cuerpos presentan tres dimensiones: *longitud*, *latitud* y *profundidad.* El conjunto de estas tres dimensiones constituye el *volúmen* de un cuerpo. La extension en longitud y latitud se llama *superficie*; la extension en una sola dimension se llama *línea.* El objeto de la *Geometría* es la medida de la extension y el estudio de las propiedades de las figuras.

La unidad de medida de longitud mas generalmente usada es el *metro*, que es la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano que pasa por Paris. El metro se divide en diez *decímetros*, el decímetro en diez *centímetros*, y el centímetro en diez *milímetros.*

Cuando se mide una longitud sucede frecuentemente que hay necesidad de apreciar con exactitud partes bastante pequeñas, menores que un milímetro, por ejemplo. Entónces se emplea el *vernier*, instrumento así llamado del nombre de su inventor.

El vernier es una pequeña regla de 9 milímetros de longitud, dividida en diez partes iguales, de suerte que cada una de estas divisiones equivale á $\frac{9}{10}$ de milímetro, dos divisiones equivalen á $2 \times \frac{9}{10}$, tres divisiones á $3 \times \frac{9}{10}$, etc. Si se hace coincidir una division del vernier con una regla dividida en milímetros, se notará que á derecha é izquierna del punto de coincidencia, la primera division del vernier distará de la primera division de la regla dividida en milímetros $\frac{1}{10}$ de milímetro, la segunda $\frac{2}{10}$, la tercera $\frac{3}{10}$ y así sucesivamente.

Esto entendido, supongamos que se quiere averiguar la longitud del objeto AC (Fig. 1). Aplíquese la regla dividida en milímetros de modo que el cero de sus divisiones coincida con el extremo A del objeto. Por la inspeccion de la figura se ve que resultan 8 milímetros de 0 á *m*, y una parte que no llega á un milímetro; esta parte es la que va á determinarse con exactitud por medio del vernier. Póngase el vernier CD sobre la regla PQ de manera que su extremo 0 toque el extremo C del objeto AC, y obsérvese donde se hace la coincidencia de dos divisiones. Esta tiene lugar hácia la quinta division del

vernier, y por consiguiente la longitud de la parte en cuestion es de $\frac{5}{10}$ de milímetro. El objeto AC tendrá, pues, 8 milímetros y $\frac{5}{10}$ de milímetro de longitud.

9. **Impenetrabilidad.**—*Impenetrabilidad* es la propiedad en virtud de la cual dos cuerpos no pueden ocupar el mismo espacio simultáneamente.

Esta propiedad es evidente en los sólidos y los líquidos.

La impenetrabilidad de los gases se demuestra por los siguientes experimentos.

Tómese un frasco con dos tubuladuras (Fig. 2), á una de las cuales se adapta un embudo C, y á la otra un tubo encorvado B, cuya extremidad exterior queda sumergida dentro del agua contenida en la copa D. Echando agua en el embudo descenderá al interior del frasco, y el aire contenido en éste, no pudiendo ocupar el mismo lugar que viene á ocupar el agua, se escapará por el tubo B, mostrándose dentro del agua de la copa bajo la forma de burbujas.

Si un vaso boca-abajo se trata de sumergir dentro del agua, se verá que este líquido no penetra al interior del vaso, donde queda siempre el aire mas ó ménos comprimido.

Hay algunos fenómenos en que parece haber penetracion; pero en realidad no existe tal cosa, y las apariencias de penetracion dependen de la porosidad- En efecto: cuando se ligan ciertos metales, zinc y cobre por ejemplo, el volúmen de la liga aparece menor que la suma de los volúmenes ligados. Igualmente si se mezcla agua con ácido sulfúrico ó alcohol, se nota una disminucion de volúmen respecto al que debia resultar de la mezcla. En

ambos casos no se verifica otra cosa que un arreglo particular de moléculas, que produce una contraccion de volúmen á espensas de los poros de las sustancias mezcladas.

La extension y la impenetrabilidad son dos propiedades sin las cuales no puede existir un cuerpo; y por esto se las considera como propiedades *esenciales* ó *primarias* de la materia, razon por la cual la materia se difine tambien: *todo lo que es extenso é impenetrable.* Las otras propiedades, como la porosidad, dilatabilidad, etc., son *secundarias*, pues bien se concibe la existencia de la materia sin ellas.

10. Indestructibilidad — La materia es indestructible, es decir, permanece siempre con sus cualidades esenciales por mas profundos que sean los cambios á que se someta.

Las fuerzas de la naturaleza no destruyen la materia. El hombre es impotente para destruir así como para crear la mas insignificante partícula. La materia recorre solamente un círculo de trasformaciones mas ó ménos extenso, pero nunca desaparece. Así, por ejemplo, los vejetales se asimilan los jugos de la tierra ó del medio en que viven, en virtud de fuerzas naturales que les son propias; los vegetales á su vez vienen á ser parte integrante de los animales, y estos restituyen á la tierra los elementos de que se han formado, sin aumento ni disminucion, cuando llega la época de su descomposicion.

Una observacion superficial pudiera hacer creer que la materia es destructible en algunos casos. Por ejemplo: cuando su quema un pedazo de papel ó se evapora un poco de agua al aire libre, parece á primera vista que estas sustancias se destruyen; pero si el papel se quema en un vaso cerrado, la su-

ma de las cenizas y del gas en que se convierte será exactamente igual en peso al peso del papel. Lo mismo puede verificarse con el vapor de agua; recogido este y vuelto al estado líquido, su peso y volúmen seran exactamente iguales al del agua evaporada.

11. Divisibilidad. — Todos los cuerpos pueden ser fraccionados en partes mas ó ménos pequeñas, y á esta propiedad se da el nombre de *divisibilidad.*

La materia es divisible á un grado tal, que la imaginacion apénas puede concebirlo. Por el sentido del olfato reconecemos la presencia de materias tan sutiles, que escapan al tacto y á la vista; así, un grano de almizcle perfuma el aire de un aposento por mucho tiempo sin que experimente disminucion apreciable en su peso.

Las materias solubles sufren una division extrema. Un grano de nitrato de cobre comunica un color azulado á una gran cantidad de agua, y lo mismo sucede con otras materias, como el carmin, el índigo, etc. Esta coloracion uniforme en cada una de las partículas del agua, no se explica sinó por la suma division de la materia colorante.

La sangre está compuesta de glóbulos rojos que nadan en una parte líquida llamada suero. Un millon de estos glóbulos, que en el hombre tienen un diámetro de $\frac{1}{150}$ de milímetro, forma una sola gota que puede suspenderse en la punta de un alfiler.

Hay animalillos tan pequeños que no son visibles sinó al microscopio, instrumento que aumenta de una manera prodigiosa la magnitud de los objetos. Con este instrumento se ven en una sola gota de agua corrompida millares de seres animados. Una gotita de esperma contiene infinidad de partí-

culas que se mueven con gran rapidez, y que se han considerado como seres vivientes llamados *espermatozoarios*. ¡Y estos diferentes seres se componen de órganos definidos!

Por asombrosa que sea la division de la materia no debe considerarse como infinita. Es verdad que por el pensamiento podemos continuarla de un modo indefinido, puesto que por mínima que sea una parte, puede siempre concebirse dividida en dos, cada una de estas en otras dos, y así sucesivamente sin llegar á un límite. Pero en el campo de la experimentacion se llega á un término que es imposible pasar. Solamente admitiendo la existencia de los átomos pueden explicarse esas leyes químicas que rigen las combinaciones, á saber: la ley de las proporciones definidas y la de las proporciones múltiples. La cristalizacion de las sustancias, es decir, esas formas geométricas regulares que toman sus moléculas cuando pasan del estado líquido al sólido, es otra prueba de la existencia de partes indivisibles.

12. Compresibilidad.—La *compresibilidad* es la propiedad que tienen los cuerpos de reducirse á menor volúmen por efecto de una presion.

Los cuerpos mas compresibles son los gases, de suerte que por una presion conveniente pueden reducirse hasta un volúmen cien veces menor que el primitivo. Los sólidos son ménos compresibles que los gases; y en cuanto á los líquidos, ha sido cuestionable si sean mas ó ménos compresibles que los sólidos. En efecto, todos los físicos, siguiendo el experimento de los académicos del Cimento, han considerado los líquidos como los cuerpos ménos compresibles; pero segun los experimentos de Mr. A. Pri-

vat Deschanel, de J. Perkins citado por Mr. Daguin, y de otros físicos modernos, resulta que los líquidos son mas compresibles que los sólidos.

La compresibilidad tiene un límite del que no puede pasarse sin que el cuerpo cambie de estado ó se modifique notablemente. Los gases mas allá de cierta presion, se convierten en líquidos; los líquidos en sólidos y los sólidos en polvo fino ó corren, segun las experiencias de M. Tresca, á la manera de los líquidos, cuando se les somete á muy fuerte presion.

Hay cuerpos cuya compresibilidad es evidente: las esponjas, el hule, el corcho, &, se reducen facilmente á menor volúmen por la sola presion de la mano. En los metales se demuestra esta propiedad por las impresiones que reciben y conservan, como se ve en las medallas, monedas, &.

La compresibilidad de los líquidos se demuestra con el *piezómetro*, instrumento inventado por Œrsted y modificado por los Señores Despretz y Laigey. El piezómetro (Fig. 3) se compone de un cilindro de cristal, de paredes espesas, bien pegado con mastic á un pié de madera. A su parte superior lleva una tapadera ó pieza de cobre bien ajustada, que se desatornilla á voluntad. Esta pieza está atravesada por un embudo R que sirve para introducir agua dentro del cilindro de cristal, y por un cuerpo de bomba que lleva un émbolo bien adaptado y que se pone en movimiento por un tornillo de presion P. Un reservatorio de vidrio A se encuentra dentro del aparato y se termina en su extremidad superior por un tubo capilar encorvado, que desciende á sumergirse por su extremidad inferior abierta en un baño de mercurio O. Este tubo ha sido dividido de

antemano en cierto número de partes de igual capacidad, y ya se tiene conocido el número total de estas partes contenido en todo el reservatorio. Tambien hay dentro del aparato un instrumento llamado *manómetro de aire comprimido*, que consiste en un tubo de vidrio B, lleno de aire, cerrado por su parte superior y abierto por la inferior, que está introducida en el baño de mercurio O. Al lado del tubo hay una escala graduada G.

Para probar la compresibilidad de un líquido con el piezómetro, se llena primeramente de este líquido el reservatorio y tubo capilar, colocándolo en seguida en el baño de mercurio, y luego se llena de agua el cilindro de cristal. Entónces, haciendo descender el émbolo por medio del tornillo P, la presion ejercida sobre el agua se trasmite al mercurio del reservatorio, y este líquido sube en el tubo capilar y en el manómetro. De este ascenso del mercurio en el tubo capilar se deduce que el líquido del reservatorio ha sido reducido á menor volúmen, y fácil es entónces averiguar el grado de contraccion. En cuanto á la reduccion de volúmen del aire contenido en el manómetro la escala graduada indicará el valor de la presion ejercida sobre el líquido de todo el aparato.

La compresibilidad de los gases se prueba por medio del *eslabon de aire.* Consiste este instrumento en un tubo de vidrio de paredes gruesas (Fig. 4) cerrado por su parte inferior y atravesado hácia la otra por un émbolo bien aceitado que se adapta perfectamente al tubo. Empujando este émbolo, penetrará mas ó ménos dentro, y como el aire interior del tubo no tiene por donde escaparse, se sigue que ha sido comprimido.

13. Dilatabilidad.— Todo cuerpo sometido á la accion del calor aumenta de volúmen. A esta propiedad de los cuerpos se da el nombre de *dilatabilidad.*

Los cuerpos mas dilatables son los gases, vienen en seguida los líquidos y por último los sólidos que son los ménos dilatables. La dilatacion de los sólidos puede ser *lineal* ó *cúbica*, segun que se la considera en una sola dimension ó en las tres. En los líquidos y gases no se considera mas que la dilatacion cúbica.

Se demuestra la dilatacion lineal por medio del siguiente aparato. Este consiste en una varilla metálica D (Fig. 5) fija en una de sus extremidades por el tornillo de presion M, y libre por la otra que pasa por un agujero de la bola N, quedando en contacto con la rama corta de la aguja movible L. Puesta la aguja en el cero del cuadrante, y quemando un poco de alcohol en un reservatorio colocado debajo de la varilla, esta se calienta y se ve que la aguja sube recorriendo la graduacion del cuadrante, lo que depende del alargamiento de dicha varilla.

La dilatacion cúbica se demuestra por medio del *pirómetro* ó *anillo* de 'S Gravesande. Este aparato es un anillo metálico S (Fig. 6) al traves del cual puede pasar sin dificultad una bolita de cobre *a* casi del mismo diámetro que el anillo. Cuando esta bolita se calienta, su paso al traves del anillo se hace imposible, lo que demuestra que ha aumentado de volúmen. Al enfriarse se contrae, y entónces pasa por el anillo como al principio.

Se prueba la dilatacion de los líquidos por medio de un balon B provisto de un tubo estrecho (Fig. 7); se llena de un líquido este aparato hasta cierta altura *i*, por ejemplo; se calienta el balon con una

láinpara de alcohol, y se verá la columna líquida subir sobre el nivel *i*.

La dilatacion de los gases se hace evidente poniendo en el tubo encorvado *a*, (Fig. 7) un líquido cualquiera; calentando el recipiente G, el líquido subirá sobre su nivel *a*, lo que es debido á la dilatacion del gas contenido en el recipiente.

14. Porosidad.—La *porosidad* es la propiedad en virtud de la cual existen entre las moléculas de los cuerpos ciertos intersticios invisibles á que se ha dado el nombre de *poros*.

La existencia de los poros debe admitirse desde luego, visto que todos los cuerpos son compresibles (12.) En efecto, la aproximacion molecular que tiene lugar en la compresibilidad no pudiera explicarse, sinó admitiendo espacios intermoleculares, á cuya presencia se debe el que no se toquen por ningun punto las moléculas ó átomos de los cuerpos.

Se distinguen dos especies de poros: los *poros físicos* y los *poros sensibles.* Los primeros se acaban de definir: los segundos son verdaderos huecos, agujeros ó pérdidas de sustancia, cuya existencia puede comprobarse fácilmente por experimentos.

La porosidad de la madera se demuestra echando agua en un vaso M (Fig. 8) cuyo fondo está formado de un disco de madera cortada perpendicularmente á sus fibras, y que está ajustado á la extremidad superior de un tubo de vidrio AB. Atornillando la extremidad inferior de este tubo á la platina de la máquina neumática y extrayendo el aire, se ve que el agua del vaso pasa al travęs de los poros de la madera, cayendo en forma de lluvia fina. Si en lugar de la madera se pone en el fondo del vaso un pedazo de cuero de búfalo, para formar fondo, y en

vez del agua se pone mercurio, este pasará igualmente al traves de los poros del cuero, formando la *lluvia de mercurio.*

Si se introduce un pedazo de greda en el agua, saldran muchas burbujas de aire; sucede en este caso que el agua entra en los poros de la greda y expulsa el aire contenido en ellos. En virtud de esta propiedad, cuando la piedra llamada ópalo ha perdido su trasparencia y brillantez de colores, se la hace recobrar su hermosura natural manteniéndola algun tiempo en agua. En otras piedras, por ejemplo el granito, la porosidad se demuestra poniendo un fragmento de esta sustancia en un vaso de agua bajo el recipiente de la máquina neumática. Tan pronto como empieza á enrarecerse el aire del recipiente, muchas burbujas se desprenden de la piedra, que se abren paso al traves del agua; estas burbujas son formadas por el aire contenido en los poros sensibles del granito.

La porosidad de los metales ha sido demostrada por el experimento tan conocido de los Académicos del Cimento en Florencia el año de 1661. Deseando saber si el agua era compresible, llenaron de este líquido una pequeña esfera de oro, la cual, despues de cerrada herméticamente, fué sometida á fuertes presiones; observándose entónces que el agua aparecia sobre la superficie de la esfera en forma de rocío. Este experimento ha sido repetido en otros metales siempre con el mismo resultado.

Los líquidos son porosos. Ya se ha visto (9), como la disminucion de volúmen al mezclar agua con alcohol ó ácido sulfúrico se explica por la porosidad, y lo mismo sucede en varias combinaciones químicas. La disolucion de los gases en los líquidos,

como el aire ó el ácido carbónico en el agua, es la prueba mejor de la porosidad de los gases.

En todo cuerpo debe distinguirse el *volúmen aparente*, del *volúmen real.* Volúmen aparente es el espacio limitado por la forma propia de un cuerpo, tal como se presenta en la naturaleza. Volúmen real es el que presentaria un cuerpo, haciendo abstraccion de sus poros.

La porosidad tiene aplicaciones importantes. Así, los filtros de papel, piedra, carbon, &, funcionan porque son porosos. Los poros de estas sustancias son bastante grandes para dejar pasar los líquidos, pero muy pequeños para dar paso á las impurezas ó materias extrañas suspendidas en el líquido.

Cuando en las canteras se quieren obtener grandes pedazos de piedra, se introducen en las hendiduras de la roca cuñas de madera seca; en seguida se mojan estas cuñas, que se dilatan por la entrada del agua en los poros de la madera, lo que desarrolla una fuerza suficiente para producir el efecto deseado.

Si se moja una cuerda seca, aumenta de diámetro y en consecuencia disminuye de longitud. Esta contraccion de las cuerdas es una fuerza poderosa que se ha utilizado para levantar ó sostener grandes pesos.

15. Elasticidad. — Cuando un cuerpo ha sido comprimido tiende á recobrar instantaneamente por sí mismo su forma y volúmen primitivos tan luego que cesa de obrar la fuerza de compresion. A esta propiedad se ha dado el nombre de *elasticidad.* La elasticidad de *traccion, flexion y torcion*, son propiedades particulares.

La elasticidad es muy aparente en ciertas sustan-

cias, como el hule, el mármol, el marfil, el vidrio, &; es débil en las grasas, resinas, arcillas y el plomo.

Se prueba la elasticidad del marfil, dejando caer una bolita de esta sustancia sobre un plano de mármol pulimentado y cubierto de una ligera capa de aceite mezclado á una materia colorante. Al verificarse el choque, la bolita rebota á una altura un poco menor que la de la caida á causa de la resistencia del aire, llevando una mancha circular de aceite tanto mas extensa cuanto mayor sea la altura de la caida. Esta mancha indica que la bola se ha aplanado al verificarse el choque, y que luego ha recobrado su forma primitiva por la reaccion de las moléculas, reaccion que es la causa del rebote.

Los líquidos y los gases son perfectamente elásticos. La elasticidad de los líquidos se prueba por el piezómetro, y la de los gases por el eslabon de aire; en ambos aparatos tan pronto como la presion cesa, los fluidos vuelven á tomar su forma y volúmen primitivos.

La elasticidad tiene un límite mas allá del cual los cuerpos no vuelven á su primitiva forma. Este límite varia en las diferentes sustancias.

16. Movilidad.—*Movilidad* es la propiedad que tienen los cuerpos de poder ser trasladados de un lugar á otro.

Movimiento es el estado de un cuerpo que cambia de posicion en el espacio. Si el cuerpo no cambia de posicion se dice que está en *reposo.*

Tanto el reposo como el movimiento pueden ser *absolutos* ó *relaivos.*

Un cuerpo está en reposo absoluto cuando permanece realmente en un mismo lugar del espacio; y

en reposo relativo cuando conserva la misma posicion ó las mismas distancias respecto á otros cuerpos que aparentemente estan fijos. Asi, un hombre que permanezca sobre un mismo lugar de una embarcacion en movimiento, estará en reposo con relacion á las diferentes partes de la embarcacion; pero realmente en movimiento con relacion á las costas.

Un cuerpo está en movimiento absoluto cuando se desvia con relacion á cuerpos realmente fijos; y en movimiento relativo cuando se desvia con relacion á cuerpos considerados como fijos pero que participan con él de un movimiento comun. Por ejemplo: es relativo el movimiento de un navio con respecto á las costas, que aparentemente estan fijas, pero que en realidad se mueven porque la tierra gira sobre sí misma y al rededor del sol.

Probablemente no existe en el Universo ningun cuerpo en reposo absoluto, de donde se sigue que el movimiento absoluto es una pura abstraccion, pero abstraccion necesaria en mecánica.

17. Inercia.—Un cuerpo que está en reposo no puede ponerse por sí mismo en movimiento, y recíprocamente: un cuerpo que está en movimiento no puede pasar por sí mismo al estado de reposo ó modificar su movimiento. Esta propiedad puramente negativa es lo que se llama *inercia;* pero cuando se dice que la materia es inerte, no quiere significarse con esto que sea incapaz de producir fenómenos; por el contrario, la presencia de dos cuerpos en ciertas condiciones, el calor, la electricidad, &. son causas de movimiento.

La inercia de la materia en su estado de reposo es un hecho evidente. Siempre que un cuerpo salga de este estado, será fácil encontrar la causa de se-

mejante cambio en alguna fuerza extraña.

La inercia de la materia en movimiento parece á primera vista ménos evidente que la inercia en el reposo. Por ejemplo: cuando una bola rueda sobre el tapiz de un billar el movimiento va disminuyendo gradualmente hasta cesar por completo; pero esta cesacion no se verifica porque la bola tenga en sí misma tendencia especial al reposo, sinó porque el frote sobre el tapiz y la resistencia del aire son obstáculos opuestos á su libre movimiento. Tan cierto es esto, que cuanto menor es la resistencia de los obstáculos mas tiempo persiste el movimiento; de suerte que si un cuerpo no encontrara obstáculo de ningun género, se moveria siempre en línea recta sin modificacion alguna en su movimiento.

Un magnífico ejemplo de inercia en el movimiento nos presentan los astros, en cuanto á la persistencia de sus movimientos sin alteracion sensible. Los planetas segun la filosofía newtoniana han recibido una impulsion primitiva en línea recta, cuya fuerza combinada con la atraccion del sol les hace ejecutar en el espacio vacío, ó por lo ménos en un medio muy enrarecido, un movimiento casi circular, contínuo y de duracion indefinida é invariable.

Los efectos de la inercia se observan á cada paso. Cuando un hombre que corre es detenido repentinamente por un obstáculo que se halla sobre el suelo, cae y es lanzado hácia adelante en direccion del movimiento. Lo mismo sucede al que imprudentemente desciende de un carruage en movimiento, ó al ginete cuyo caballo se detiene de momento en su carrera. Algunos animales se aprovechan instintivamente de la ley de inercia para librarse de otros que los persiguen. Bien conocida es la astucia de la

liebre que procura escaparse del perro que la persigue: cuando va á ser alcanzada cambia repentinamente de direccion, dando una media vuelta, movimiento que no puede seguir el perro sinó pasado algun tiempo, durante el cual la liebre ha tomado la delantera con ventaja.

Los efectos producidos por los proyectiles lanzados por la pólvora, son debidos tambien á la inercia.

PRINCIPIOS GENERALES DE MECÁNICA.

CAPITULO I.

NOCIONES SOBRE LOS MOVIMIENTOS Y LAS FUERZAS.

§ 1º—Movimientos.

1. Diversas especies de movimiento.— Dáse el nombre de *móvil* al cuerpo que se mueve, y el de *trayectoria* á la línea recta ó curva que el móvil describe durante su movimiento. Si la trayectoria descrita por el móvil es una línea recta, el movimiento se llama *rectilíneo;* y si es una línea curva se llama *curvilíneo.* El movimiento curvilíneo puede ser *circular* ó *parabólico*, segun que la curva descrita sea una circunferencia de círculo ó una parábola.

El movimiento, sea rectilíneo ó curvilíneo, se divide en *uniforme* y *variado.*

Movimiento uniforme es aquel en que el móvil recorre espacios iguales en tiempos iguales: el movi-

miento de un vapor que recorra constantemente nueve millas por hora; el de un punto cualquiera de la superficie de la tierra, que avanza como se sabe quince grados por hora en el movimiento de rotacion, son ejemplos de movimiento uniforme.

Movimiento variado es aquel en que el móvil recorre espacios desiguales en tiempos iguales. Este movimiento puede variar al infinito, pero solo consideraremos el *movimiento uniformemente variado*, en el cual la velocidad va creciendo ó disminuyendo en una cantidad constante. En el primer caso ó cuando la velocidad va creciendo, el movimiento se llama *uniformemente acelerado;* y en el segundo ó cuando la velocidad va disminuyendo, se llama *uniformemente retardado*. El movimiento de un cuerpo que cae ó que es lanzado de ábajo arriba, son ejemplos de estas dos últimas especies de movimiento.

2, Velocidad. — En todo movimiento se da el nombre de *espacio* al camino recorrido por un cuer po; y el de *tiempo* el número total de segundos durante el cual el cuerpo ha recorrido el espacio. Entendido esto, fácil es dar la idea de velocidad.

En el movimiento uniforme se llama *velocidad*, el espacio recorrido en la unidad de tiempo. Por ejemplo: si se dice que un móvil recorre 15 metros por segundo con movimiento uniforme, la velocidad es el espacio de 15 metros.

En el movimiento variado, la idea de velocidad no es tan simple como en el movimiento uniforme. En el movimiento variado, se entiende por velocidad, en un instante dado, la del movimiento uniforme que adquiere el móvil cuando la fuerza que obra sobre él cesa en este instante. Por ejemplo: si despues de 5 segundos de movimiento uniformemente

acelerado, se dice que la velocidad de un móvil es de 50 metros, se da á entender con esto que si la fuerza aceleratriz cesara á los 5 segundos, el móvil en virtud de la inercia continuaria moviéndose uniformemente con una velocidad de 50 metros por segundo.

El nombre de *aceleracion* se da al incremento de la velocidad en la unidad de tiempo.

§ 2º—Fuerzas.

3. Definicion y division de las fuerzas. —*Fuerza* es toda causa capaz de producir el movimiento ó de modificarlo. La pesantez ó sea la causa que hace caer los cuerpos hácia la superficie de la tierra es una fuerza. Las atracciones y repulsiones magnéticas y eléctricas, las presiones que los fluidos ejercen sobre las paredes de los recipientes, la accion muscular de los animales, son tambien fuerzas.

Las fuerzas segun su modo de obrar se han dividido en *continuas* é *instantáneas*. Fuerzas continuas son aquellas que obran durante todo el movimiento, por ejemplo la gravedad. Fuerzas instantáneas son las que obran durante un tiempo muy corto, como se observa en la explosion de la pólvora. *Fuerza constante* es la que conserva siempre la misma intensidad, y *variable* la que no la conserva.

4. Medida de las fuerzas.—Las fuerzas son cantidades y por consiguiente son suceptibles de medida. El esfuerzo necesario para sostener un peso de un kilógramo es la *unidad de fuerza.*

Los instrumentos que sirven para medir las fuerzas se llaman *dinamómetros*. La figura 9 representa uno de estos instrumentos. Consiste este en una lámina flexible de acero templado AB, encorvada por el medio; á la extremidad de la rama inferior está fijo un arco de hierro *a*, que pasa libremente por una abertura practicada en la rama superior y se termina por un anillo *m* que sirve para fijar el aparato. A la extremidad de la rama superior está fijo igualmente otro arco de hierro *b* que pasa por una abertura de la rama inferior, terminándose por un gancho *n* que sirve para suspender los pesos. El aparato se gradua, fijando el anillo superior y suspendiendo al gancho pesos sucesivos de 1, 2, 3, 4.. kilógramos, y marcando á cada peso una línea sobre el arco *a* en los puntos donde por la flexion se vaya deteniendo la rama A. En seguida se ponen sobre las líneas los números 0, 5, 10 . . . ., de 5 en 5, con lo cual quedará graduado el dinamómetro.

Para medir con el dinamómetro una fuerza, por ejemplo la que un hombre desarrolla al levantar un fardo, se suspende el fardo al gancho inferior y se levanta todo el aparato suspendiéndolo por el anillo *m;* al doblarse el resorte, la rama A marcará sobre el arco *a* el peso del fardo en kilógramos, y por consiguiente el valor de la fuerza.

5. **Punto de aplicacion, direccion é intensidad de las fuerzas.**—El efecto de una fuerza depende de tres cosas, á saber: de su *punto de aplicacion*, de su *direccion* y de su *intensidad*.

Punto de aplicacion de una fuerza, es el punto material sobre el cual la fuerza obra directamente.

Direccion de una fuerza es la línea recta que seguiria el punto material, si estando en reposo cedie-

se á la accion de la fuerza.

Intensidad de una fuerza es la energía con que esta fuerza obra, ó su valor respecto á otra que se toma por unidad.

6. Representacion de las fuerzas.— Las fuerzas se representan por medio de líneas rectas, que partiendo del punto de aplicacion marcan con su direccion la del movimiento. En cuanto á la intensidad de una fuerza se la aprecia por la magnitud de la recta, y se mide llevando la unidad de fuerza, el centímetro por ejemplo, sobre la recta tantas veces como unidades haya en la fuerza dada. Sea A (Fig. 10) el punto de aplicacion de las fuerzas P y Q: la direccion de estas fuerzas estará representada por la de las líneas AP, AQ, y si suponemos que la intensidad de la fuerza P equivalga á 5 kilógramos, y la de la Q á 4 kilógramos, las intensidades respectivas quedaran representadas por las magnitudes A5, A4, siendo A0 la unidad de fuerza.

7. Equilibrio.—Cuando varias fuerzas se aplican á un punto material puede suceder que estas fuerzas se neutralicen mutuamente, y entónces se dice que las fuerzas se *equilibran*, ó que el punto material está en *equilibrio*.

De aqui se deduce que el estado de reposo ó de movimiento de un punto al cual se aplican fuerzas que se equilibran, en nada se altera puesto que estas fuerzas se nulifican; y por tanto, pueden introducirse ó suprimirse á voluntad sin alterar el estado del punto.

Cuando el equilibrio tiene lugar en un cuerpo en reposo se le llama *estático*; y cuando en un cuerpo en movimiento, *dinámico*.

Entre el reposo y el equilibrio hay esta diferen-

cia: en la idea de reposo no entra la nocion de fuerza, miéntras que en la de equilibrio entra necesariamente esta nocion. Un cuerpo puede estar animado de un movimiento sin estar sometido á la accion de ninguna fuerza (17, Int.), y si entónces se le aplica un sistema de fuerzas que se equilibren, su movimiento en nada será modificado.

8. Definicion y division de la Mecánica. — La *Mecánica* es la ciencia que trata de las fuerzas y sus efectos.

La Mecánica se divide en *Estática* y *Dinámica.* La Estática trata del equilibrio y la Dinámica del movimiento.

La Estática de los sólidos se lama *Geostática;* la de los líquidos se llama *Hidrostática*; la Dinámica de los sólidos se llama *Geodinámica;* la Dinámica de los líquidos se llama *Hidrodinámica.*

CAPITULO II.

LEYES DEL MOVIMIENTO.

§ 1º—Movimiento uniforme.

9. Ley única. — *Los espacios recorridos por un cuerpo con movimiento uniforme son proporcionales á los tiempos.*

Demostracion.—Si se designa por e el espacio recorrido por el cuerpo, por t el tiempo, y por v la velocidad ó espacio recorrido en la unidad de tiem-

pó, podrá establecerse la siguiente proporcion:

$e : t :: v : 1$, de donde

(a) $e=vt$; es decir, que el espacio es igual á la velocidad multiplicada por el tiempo.

Para otro tiempo t', diferente del anterior, siendo la velocidad la misma, la fórmula será: $e'=vt'$, y comparando miembro á miembro la ecuacion (a) con esta última y suprimiendo el factor comun v, resulta: $e : e' :: t : t'$, proporcion que expresa el principio enunciado.

De la fórmula (a) se deduce:

$t=\frac{e}{v}$, y $v=\frac{e}{t}$; fórmulas que sirven para calcular el tiempo y la velocidad. La expresion última indica, que *la velocidad es la relacion constante entre el espacio recorrido y el tiempo empleado en recorrerlo.*

Se acostumbra en Mecánica representar algunas leyes por construcciones gráficas ó figuras geométricas. Asi, la ley del movimiento uniforme puede expresarse por la relacion entre la superficie de un rectángulo y dos de sus lados adyacentes. En efecto: se sabe (Fig. 11) que superficie ABCD=BC×AB; relacion exactamente igual á $e=vt$, cuando superficie ABCD representa el espacio, BC la velocidad y AB el tiempo.

§ 2º—Movimiento variado.

10. Leyes del movimiento uniformemente variado. —Estas leyes són dos:

1.ª *En el movimiento uniformemente variado, las velocidades son proporcionales á los tiempos.*

Si se representa por a la impulsion de que está

animado un móvil desde el momento en que empieza el movimiento uniformemente variado, y por G la cantidad constante en que varia la velocidad en cada unidad de tiempo, la velocidad se trasformará sucesivamente en

$$a \pm G,\ a \pm 2G, \ldots\ldots\ldots, a \pm Gt.$$

El signo mas, corresponde al movimiento uniformemente acelerado, y el signo ménos, al retardado. Si V, pues, representa la velocidad final al cabo del tiempo t, se tendrá:

$$\text{(b)} \quad V = a \pm Gt.$$

Si $a = o$, es decir, si el cuerpo parte del estado de reposo, la fórmula será:

$$\text{(c)} \quad V = Gt.$$

Para otro tiempo t', diferente del anterior, la velocidad será:

$$V' = Gt'.$$

De la comparacion de estas dos últimas ecuaciones resulta, suprimiendo el factor comun G,

$$V : V' :: t : t';$$

proporcion que demuestra el principio enunciado.

2.ª *En el movimiento uniformemente acelerado, los espacios recorridos por un móvil, que parte del estado de reposo, son proporcionales á los cuadrados de los tiempos empleados en recorrerlos.*

Demostracion.—Es condicion del movimiento uniformemente acelerado, que la velocidad vaya aumentando en una cantidad constante en cada unidad de tiempo; pero si consideramos la unidad de tiempo infinitamente pequeña, el aumento de la velocidad será tambien infinitamente pequeño en cada unidad de tiempo, y la velocidad será entónces sensiblemente constante. En este concepto, las velocidades sucesivas G, 2G, 3G, ..., Gt, multiplicadas

por 1, seran los espacios recorridos con movimiento sensiblemente uniforme en las unidades de tiempo respectivas. Por consiguiente, el espacio total será la suma de todos estos espacios parciales; y como estos forman una progresion aritmética, dicha suma será $(G+Gt)\times\frac{t}{2}$, esto es, la suma de los extremos multiplicada por la mitad del número de términos, que aquí es t. Ahora, si suponemos que el móvil parte del estado de reposo, siendo cero la velocidad correspondiente al principio del primer instante, la suma se reducirá á

$$Gt\times\frac{t}{2}=G\frac{t^2}{2}.$$

Luego la fórmula del espacio será:

$$\text{(d)} \quad E=G\frac{t^2}{2}=\tfrac{1}{2}G\,t^2.$$

Si E' es el espacio recorrido en otro tiempo t', diferente de t, la fórmula será:

$$E'=\tfrac{1}{2}G\,t'^2$$

Comparando esta fórmula con la anterior y suprimiendo la parte comun $\frac{G}{2}$, se tendrá:

$E : E' :: t^2 : t'^2$; proporcion que demuestra el principio enunciado.

En la fórmula (c), la velocidad está expresada en funcion del tiempo; pero tambien se la puede expresar en funcion del espacio, eliminando t en las ecuaciones (c) y (d). En efecto: de la primera se saca $t=\frac{V}{G}$, de donde $t^2=\frac{V^2}{G^2}$; sustituyendo este valor t^2 en la segunda y suprimiendo el factor comun G se tendrá:

$$E=\frac{V^2}{2G}; \text{ y despejando } V, \text{ será:}$$

$$(e) \quad V=\sqrt{2GE}.$$

Cuando el móvil poseé una velocidad inicial a, las fórmulas del movimiento uniformemente acelerado son:

$$E=at\pm\tfrac{1}{2}Gt^2, \text{ y } V=\sqrt{a\pm2GE}.$$

El signo mas, corresponde al movimiento acelerado y el ménos, al retardado.

Si en la fórmula $E=\frac{1}{2}Gt^2$, se supone $t=1$, resultará $E=\frac{1}{2}G$; lo que significa que el espacio recorrido durante la primera unidad de tiempo, es la mitad de la aceleracion ó de la velocidad adquirida durante esta unidad.

Otra demostracion.—Sean las dos líneas AB y BC (Fig. 12) perpendiculares entre sí. Representemos el tiempo t por la longitud AB, y la velocidad gt adquirida por el móvil despues de este tiempo, por la longitud BC; y únase el punto A al punto C. Divídase la recta AB en cierto número de partes A, ab, bc, &, iguales entre sí y á la unidad de tiempo; entónces las perpendiculares am, bn, co, que son proporcionales á aquellas partes, representaran las velocidades adquiridas por el móvil despues de los tiempos Aa, ab, bc, cB.

Esto supuesto, tratemos de encontrar los espacios recorridos por el móvil en cada uno de los tiempos ab, bc, cB, que supondremos muy pequeños. El espacio recorrido durante el tiempo ab será igual á $am\times ab$, si la velocidad del móvil permanece igual á am durante todos los instantes que componen este tiempo, puesto que entónces el movimiento seria uniforme; este espacio estará, pues, representado por la superficie del rectángulo $ampb$ (9). De la misma manera, los espacios recorridos durante los tiempos bc, cB, con las velocidades respectivas bn, co, estaran

representados por las superficies de los rectángulos *bnqc*, *cov*B, y el espacio recorrido durante el tiempo AB será la suma de todos estos rectángulos. Esta difiere de la superficie del triángulo ABC, en tanto cuanto suman los pequeños triángulos A*am*, *mpn*, *nqo*, *ov*C; pero es claro que si la recta AB se divide en doble número de partes, la suma de los rectángulos se aproximará mas á valer la superficie del triángulo, puesto que seran aumentados con los pequeños rectángulos sombreados en negro. De manera que á medida que vaya siendo mayor el número de partes en que se divida la recta AB, la suma de los rectángulos se irá aproximando mas y mas á valer la superficie del triángulo. Luego si esta recta ó el tiempo AB se considera dividido en infinito número de partes iguales infinitamente pequeñas, en cuyo caso la velocidad variará de un modo continuo, el espacio recorrido durante el tiempo AB, ó la suma de los rectángulos, estará expresado por la superficie del triángulo ABC. Pero esta superficie tiene por medida el producto de la mitad de la base por la altura, es decir $\frac{1}{2}AB \times BC$; y como $AB = t$ y $BC = Gt$, resultará: $E = \frac{1}{2}Gt^2$, que es la fórmula ántes encontrada.

CAPITULO III.

MEDIDA DE LAS FUERZAS POR LAS ACELERACIONES.

11. Axioma.—*El efecto de una fuerza sobre un cuerpo es independiente del estado de reposo ó de movimiento de este cuerpo.*

En efecto, si una fuerza obra sobre un cuerpo en

reposo le comunicará cierto movimiento dependiente de su direccion é intensidad; y si el cuerpo está en movimiento al obrar la fuerza sobre él, el movimiento resultante será igual al movimiento de que el cuerpo viene animado, mas el que la fuerza le comunicaria si estuviera en reposo.

12. **Corolarios**.—Los dos principios siguientes, muy útiles en Mecánica, son consecuencia del axioma anterior.

1. ° *Si dos ó mas fuerzas obran simultaneamente sobre un mismo punto material, cada una de ellas produce su efecto como si las otras no existiesen.*

2. ° *Si una fuerza constante en direccion y en intensidad obra sobre un cuerpo en reposo, le imprimirá un movimiento rectilíneo uniformemente variado.* La proposicion recíproca es tambien verdadera.

13. **Teorema 1**.—*Las fuerzas constantes son proporcionales á las aceleraciones que imprimen á una misma masa.*

Demostracion.—Sean dos fuerzas F y F', imprimiendo cada una separadamente sobre una masa las aceleraciones respectivas g y g'. La suma F+F' de estas fuerzas imprimirá la aceleracion $g+g'$ (Ax. cor. 1. °); pero si F=F', de donde $g=g'$, la fuerza se convertirá en 2F, y la aceleracion en $2g$; si la fuerza fuera 3F, la aceleracion seria $3g$, si 4F, la aceleracion seria $4g$, y en general una fuerza nF imprimirá la aceleracion ng. Luego, etc.

14. **Corolarios**.—1. ° Segun la proposicion anterior, las relaciones $\frac{F}{g}, \frac{F'}{g'}, \frac{F''}{g''}$ de varias fuerzas á sus aceleraciones, son iguales; y esta relacion constante entre la fuerza y la aceleracion, sirve de medida á lo que se llama masa. Si, pues, M designa la

masa de un cuerpo, F la fuerza que obra sobre él y g la aceleracion debida á la fuerza, se tendrá:

$$M=\frac{F}{g}.$$

Esta relacion da una idea exacta de lo que debe entenderse por masa, y en consecuencia debe definirse: *la relacion entre una fuerza constante y la aceleracion que imprime.*

2.° De la fórmula $M=\frac{F}{g}$, se deduce:

$$(f) \quad F=Mg.$$

Esta expresion, que es el producto de la masa por la aceleracion, se llama *cantidad de movimiento.*

15 Teorema II.—*Las fuerzas constantes son proporcionales á sus cantidades de movimiento.*

DEMOSTRACION.—Si se designa por F una fuerza que obra sobre la masa M, imprimiéndole la aceleracion g; y por F' otra fuerza que obra sobre la masa M', imprimiéndole la aceleracion g', será: (Teor. I. cor. 2) $F=Mg$ y $F'=M'g'$; de donde, dividiendo la primera ecuacion por la segunda resulta:

$$(g) \quad \frac{F}{F'}=\frac{Mg}{M'g'}.$$

Lo que demuestra la proposicion enunciada.

16. Corolario 1.°—Si en la ecuacion anterior se supone $F=F'$, será:

$$Mg=M'g', \text{ ó bien:}$$
$$M : M' :: g' : g,$$

esto es, *á fuerza igual las aceleraciones estan en razon inversa de las masas.*

2.°—Si en la misma ecuacion (g) se hace $g=g'$, será:

$$F : F' :: M : M',$$

es decir: *á aceleracion igual las fuerzas estan en razon directa de las masas, ó son proporcionales á las masas.*

17. Resultante, componentes. — Cuando varias fuerzas obran simultaneamente sobre un punto material ó un sistema de puntos, fácil es concebir que una fuerza única de determinada direccion y aplicada en un punto conveniente, puede producir el mismo efecto que el conjunto de las fuerzas dadas. A esta fuerza única se le llama *resultante*, y á las fuerzas dadas, *componentes.*

La operacion por medio de la cual se determina la resultante de varias fuerzas componentes, se llama *composicion de las fuerzas*; y la que consiste en determinar las componentes, dada la resultante, se llama *resolucion* de las fuerzas.

CAPITULO IV.

COMPOSICION Y RESOLUCION DE LAS FUERZAS.

§ 1.° —Composicion de las fuerzas.

18. Teorema I.—*Cuando dos fuerzas obran sobre un mismo punto y en la misma direccion, su resultante es igual á su suma si actuan en el mismo sentido; é igual á su diferencia si actuan en sentido*

contrario; y el punto se mueve en el sentido de la mayor.

Demostracion.—Este teorema es una consecuencia del principio de independencia de las fuerzas (Ax. cor. 1.°).

1.° Un punto material A (Fig. 13) solicitado por las fuerzas P y Q, que actuan en la misma direccion segun la recta AB, se moverá con una fuerza igual á P+Q, que será su resultante. La flecha indica la direccion del movimiento.

2.° Un punto material A (Fig. 14) sometido á la accion de las fuerzas opuestas P y Q, se moverá con la fuerza resultante P—Q, segun el sentido de la fuerza P (se supone que P es mayor que Q). Si P=Q, la resultante será nula y habrá equilibrio (7).

En caso de ser muchas las fuerzas que obran sobre el punto, la resultante será igual á la suma de las que obran en un sentido, ménos la suma de las que obran en sentido opuesto, y el punto se moverá en el sentido de la mayor suma.

19. Teorema II.—*La resultante de dos fuerzas concurrentes está representada en magnitud y direccion por la diagonal del paralelógramo construido sobre las rectas que representan estas fuerzas.*

Demostracion.—Sea el punto material A (Fig. 15) solicitado al mismo tiempo por las fuerzas P y Q representadas por AB y AD en magnitud y direccion. La fuerza P tiende á llevar el punto A por la direccion AB hácia BC, y como la fuerza Q es paralela á la recta BC, por su accion no puede acercar ni alejar el punto A de la misma línea BC, por lo que debiendo llegar el móvil á dicha línea por la accion de la fuerza P, realmente llegará, obre ó no la fuerza Q. Del mismo modo se demos-

trará que el punto A llegará á la recta DC en virtud de la fuerza Q, obre ó no la fuerza P, paralela á la recta DC: luego el móvil A solicitado simultaneamente por ambas fuerzas, debiendo llegar tanto á la recta BC como á la recta DC, se hallará en el punto G comun á entrambas. Pero quedando el móvil abandonado á sí mismo despues del impulso recibido, deberá continuar su movimiento con la misma velocidad y direccion que lo comenzó, y así habrá descrito la diagonal AC del paralelógramo ABCD construido sobre las rectas AB, AC, que representan las fuerzas P y Q.

20. Teorema III.—*Las distancias de un punto de la resultante á las componentes, estan en razon inversa de las intensidades de estas componentes.*

DEMOSTRACION.— Sean las perpendiculares OM, ON (Fig. 15)—estas perpendiculares se llaman *distancias*—En el triángulo ACD se tiene:

Sen. ACD ó sen. b : sen. a : : AD : CD=AB; pero

ON : OM : : sen. b : sen. a;

luego, combinando las dos proporciones, resultará:

ON : OM : : AD : AB. Luego etc.

21. Teorema IV.—*La resultante de tres fuerzas concurrentes no situadas en un mismo plano, está representada en magnitud y direccion por la diagonal del paralelepípedo construido sobre las rectas que representan estas fuerzas.*

DEMOSTRACION.—Sean las fuerzas P, Q, S (Fig. 16), representadas en magnitud y direccion por las rectas Ab, Ad, Ac. Hállese la resultante de las dos fuerzas Q y S por la regla del paralelógramo de las fuerzas (Teor. II.), y sea R esta resultante representada por la diagonal Ac del paralelógramo Adec. Hállese en seguida la resultante entre R y P y sea

R' esta resultante, representada por la diagonal A*o* del paralelógramo A*eob*. Esta fuerza R' será la resultante de las tres fnerzas P, Q, S. Pero por la sola inspeccion de la figura se ve que la recta A*o*, que representa la resultante R, no es otra cosa que la diagonal del paralelepípedo construido sobre las longitudes A*b*, A*d*, A*c*, que representan las tres fuerzas. Luego, etc.

22. Composicion de varias fuerzas.—Polígono de las fuerzas.—Para componer un número cualquiera de fuerzas concurrentes, se compondran desde luego las dos primeras, lo que dará una primera resultante; esta resultante se compondrá con la tercera fuerza, lo que dará una segunda resultante; esta segunda resultante se compoudrá con la cuarta fuerza, y así sucesivamente hasta obtener la resultante final.

Se sigue, sin embargo, un procedimiento mas sencillo, que constituye el *polígono de las fuerzas*. Consiste en ir colocando paralelamente á sí mismas unas á continuacion de otras las rectas que representan las fuerzas dadas; y la última recta que cierrra el polígono así formado es la resultante final.

EJEMPLO.—Sean AB, AC, AD, AE, AF, (Fig. 17) las rectas que representan las fuerzas dadas aplicadas al punto A. Para hallar la resultante, tírese por el punto B una recta B*c* igual y paralela á A*c*; por el punto *c* una recta *cd* igual y paralela á AD; por el punto *d* una recta *de* igual y paralela á AE; por el punto *e* una recta *ef* igual y paralela á AF; tírese por último la recta A*f* que cierra el polígono, y esta será la resultante buscada.

23. Teorema V.—*La resultante de dos fuerzas paralelas y del mismo sentido, les es paralela, del mis-*

mo sentido, igual á su suma, situada entre ellas y en el mismo plano, y divide la recta en dos partes inversamente proporcionales á las intensidades de estas fuerzas.

DEMOSTRACION. (1)—Sean F y F' (Fig. 18) dos fuerzas paralelas y del mismo sentido, aplicadas á los puntos A y B de un cuerpo sólido.

El estado del sistema no cambiará si se aplican en A y B dos fuerzas P y P' iguales y contrarias, obrando segun la línea AB (3). Componiendo por una parte las fuerzas F y P y por otra las fuerzas F' y P', se obtendran dos resultantes S y S', que seran concurrentes, y que se podran trasportar á su punto de concurso C. Despues podran reemplazarse por sus componentes, lo que dará en C dos fuerzas *p* y *f* respectivamente iguales á P y F, y dos fuerzas *p'* y *f'* respectivamente iguales á P' y F'. Las dos fuerzas *p* y *p'* iguales y opuestas podran ser suprimidas sin cambiar el estado del sistema; no quedaran, pues, mas que las fuerzas *f* y *f'* que siendo paralelas á F y F', tendran la misma direccion y el mismo sentido, y se compondran por consiguiente en una sola fuerza R, paralela á F y F', del mismo sentido que ellas, igual á su suma, y trasportable á un punto cualquiera de su direccion, por ejemplo al punto D donde esta direccion corta á la recta AB.

---

(1) Entre las varias demostraciones que se han dado de este teorema, tomamos, por ser mas clara, la de las *Nociones de Mecánica* de Mr. N. Sonnet.

(2) Esta línea se considera como inextensible.

Luego 1.° : *dos fuerzas paralelas y del mismo sentido, aplicadas á un cuerpo sólido, tienen una resultante paralela y del mismo sentido, igual á su suma, situada entre ellas y en el mismo plano.*

Ahora, los triángulos semejantes SAF y ACD dan la proporcion

SF : AF : : AD : CD ó P : F : : AD : CD.

Los triángulos semejantes S'BF' y BCD dan igualmente:

S'F' : BF' : : BD : CD ó P' : F' : : BD : CD;

pero estas dos proporciones tienen los mismos extremos, luego

AD : BD : : F' : F.

Por otra parte, las longitudes AD y BD son entre sí como las distancias de la resultante á las componentes F y F'.

Luego 2.° : *las distancias de la resultante á las dos componentes, estan en razon inversa de estas componentes.*

Aplicando la misma demostracion al caso de dos fuerzas paralelas de sentido opuesto, se llegará de la misma manera á esta conclusion:

Dos fuerzas paralelas y de sentido opuesto aplicadas á un cuerpo sólido, tienen una resultante que les es paralela, igual á su diferencia, del mismo sentido que la mayor, situada mas cerca de la mayor, respecto á la menor, y en el mismo plano; y sus distancias á las dos componentes estan en razon inversa de estas componentes.

24. Par de fuerzas — Si dos fuerzas paralelas y de sentido contrario son iguales, su resultante será nula, es decir, no habrá resultante; pero la recta de aplicacion girará sobre sí misma, de suerte que para obtener el equilibrio seria preciso destruir ca-

da una de las fuerzas por otras dos iguales y directamente opuestas á ellas. Este sistema se llama *par de fuerzas.*

25. Composicion de un sistema cualquiera de fuerzas paralelas.—1.° Sean las fuerzas paralelas y del mismo sentido F, F', F'', F''', &. (Fig. 19) aplicadas á los puntos *a*, *b*, *c*, *d*, &. Reemplácense las dos fuerzas F y F' por una fuerza R (Fig. 23), de modo que se tenga:

F : F' : : *mb* : *am*.

Reemplácense en seguida las dos fuerzas R y F'' por la fuerza R', de modo que sea:

R: F'' : : *nc* : *mn*.

Hágase lo mismo con R' y F''', de modo que sea:

R' : F''' : : *sd* : *sn*,

y así sucesivamente hasta obtener la resultante final igual á la suma de las componentes, paralela y del mismo sentido.—2.° Si las fuerzas paralelas fuesen de sentido contrario, se hallará la resultante de las dirigidas en un sentido y de las dirigidas en sentido contrario; se compondrian estas dos resultantes (22) y así se obtendria la resultante final. Aquí pudiera tambien suceder que la resultante fuese nula (24).

26. Centro de las fuerzas paralelas.—Segun la construccion que precede se ve que el punto de aplicacion de un sistema cualquiera de fuerzas paralelas no depende mas que de la intensidad y sentido de estas fuerzas, y de la posicion de los puntos de aplicacion. Por consiguiente, un cambio cualquiera de direccion de todo el sistema de fuerzas, conservando estas sinembargo su paralelismo, su sentido, intensidades relativas y punto de aplicacion, no cambiaria la posicion del punto de apli-

cacion de la resultante. A este punto se ha dado el nombre de *centro de las fuerzas paralelas.*

§ 2.° —Resolucion de las fuerzas.

27.—Resolucion de una fuerza aplicada á un punto, en dos fuerzas.—Dada una fuerza R (Fig, 20) y las direcciones AX, AZ, de las componentes situadas en el mismo plano que R, se hallaran las componentes P y Q, construyendo el palelógramo APRQ sobre AR como diagonal. Si se diese la magnitud AP en la direccion A*x*, se hallaria la otra componente Q, construyendo igualmente el paralelógramo.

28.—Resolucion de una fuerza aplicada á un punto, en tres no situadas en el mismo plano.— Para resolver una fuerza R' aplicada en A (Fig. 16), segun tres direcciones AQ, AS, AP, se tiraran por el punto *o* tres planos paralelos á los tres planos *d*A*c*, *d*A*b*, *c*A*b*, determinados por las direcciones de las fuerzas. Entónces resultará un paralelepípedo cuya diagonal es R' ó A*o*, y las rectas A*d*, A*c*, A*b*, seran las componentes buscadas.

29.—Resolucion de una fuerza en dos fuerzas paralelas.—Dada una fuerza aplicada á un punto de un cuerpo sólido, se puede resolver en dos fuerzas paralelas que pasen por dos puntos dados del cuerpo, y situadas en el mismo plano con la direccion de esta fuerza.

Sea la fuerza R aplicada en D (Fig. 21), situada entre los puntos A y B de la recta ADB. Para determinar la fuerza F, se tiene (23):

$$F : F' :: BD : AD; \text{ ó bien:}$$
$$F : F+F' :: BD : BD+AD; \text{ pero}$$
$$F+F'=R \text{ y } BD+AD=AB; \text{ luego}$$
$$F=R\times\frac{BD}{AB}.$$

La fuerza F' se determina de la misma manera, ó por la relacion

$$F'=R-F.$$

Si los dos puntos dados A y B (Fig. 22) estuviesen situados de un mismo lado de la fuerza dada R, aplicada en D, se tendria:

$$F: F' :: BD : AD; \text{ ó bien}$$
$$F : F-F' :: BD : BD-AD$$

y por consiguiente:

$$F=R\times\frac{BD}{AB}.$$

La otra fuerza F' será: $F'=R-F$.

30. **Construccion gráfica**.— Tambien se pueden determinar las componentes por una construccion sencilla (Procedimiento del Señor Sonnet).

Sea DS (Fig. 23) la fuerza dada ó la resultante R, y A y B los puntos dados; tírense las rectas AM y BN iguales y paralelas á DS; únanse los puntos M, S, N y tírese la MB que cortará la DS en un punto I. El segmento DI representará la fuerza F que debe aplicarse en A, y el segmento IS la fuerza F' que debe aplicarse en B.

En efecto, se tiene:

DI : AM : : BD : AB; y como $AM=DS=R$, resulta:

$$DI=R\times\frac{BD}{AB}=F.$$

Tambien se tiene:

IS : BN : : MS : MN y como
BN=DS=R, MS=AD, y MN=AB, será

$$IS=R\times\frac{BD}{AB}=F'.$$

Si DS (Fig. 24) es la fuerza dada ó la resultante R, y A y B los puntos dados, tírense AM y BN iguales y paralelas á DS; únanse los puntos M, N, S, y tírese la MB que va á cortar en un punto I la prolongacion de DS. El segmento DI representará la fuerza F que debe aplicarse en A (en sentido contrario de R), y la recta SI representará la fuerza F' que debe aplicarse en B (en el sentido de R).

En efecto se tiene:

DI : DS ó AM : : BD : AB, de donde

$$DI=R\times\frac{BD}{AB}=F;$$

y IS : DS : : MS : MN; pero DS=BN, MS=AD y MN=AB; luego
IS : BN ó
R : : AD : AB, de donde

$$IS=R\times\frac{AD}{AB}=F'.$$

CAPITULO V.

PESANTEZ.—CENTRO DE GRAVEDAD.—EQUILIBRIO.

§ 1.°—Pesantez.

31. **Definicion de la pesantez.**—La *pesantez* ó *gra-*

vedad es la causa que hace caer los cuerpos hácia la superficie de la tierra.

La pesantez no es mas que un caso particular de la *atraccion universal* ó sea la tendencia de la materia hácia la materia. Sir Isac Newton, partiendo de las famosas leyes de Kepler, dedujo las dos siguientes, llamadas *leyes de la atraccion universal:*

1.ª—*La atraccion se ejerce en razon directa de las masas.*

2.ª—*La atraccion se ejerce en razon inversa del cuadrado de las distancias.*

La exactitud de estas leyes se confirma mas y mas cada dia.

32. Direccion de la pesantez.—Para un mismo lugar la pesantez obra segun una direccion invariable. Esta se determina por medio de la plomada, que no es otra cosa que una bola de plomo B (Fig. 25) suspendida á la extremidad de un hilo, fijo por su otra extremidad en un punto A. Cuando la plomada se abandona á sí misma, queda en quietud y marca entónces con su direccion la direccion de la pesantez. Esta direccion se llama *vertical.*

La plomada indica constantemente la direccion de la pesantez; sinembargo La Condamine y Bourger han observado que el Chimborazo la desvia de la vertical, formando un ángulo de 7″, 5. Lo mismo ha observado Maskelyne en el monte Shehallien en Escocia.

Las verticales de los diferentes puntos concurren todas poco mas ó ménos al centro de la tierra, formando ángulos de magnitud variable. Así, el ángulo de las verticales entre Paris y Dunkerque es casi de 2° 12′; y entre Paris y Barcelona es de 7° 28′. Sinembargo, cuando se consideran verticales muy

próximas entre sí, como las de las diferentes moléculas de un cuerpo ó de cuerpos cercanos, los ángulos son insensibles á causa de la magnitud del radio terrestre, que á la latitud de 45° se calcula en 6.367,400 metros.

33. Peso.—El peso es una fuerza de que puede tenerse una idea por la presion ó tension que ejerce un cuerpo sobre un obstáculo que se oponga á su caida. Puede definirse: *la resultante de las acciones de la gravedad sobre cada una de las moléculas de un cuerpo.*

Designando por P el peso de un cuerpo, por M su masa y por g la intensidad de la gravedad, se tendrá (14):

$$M=\frac{P}{g} \quad ó$$

$$P=Mg \quad (h);$$

es decir, *que el peso de un cuerpo es proporcional á su masa y á la intensidad de la gravedad.*

Tal como se ha definido el peso, se llama *peso absoluto:* tambien puede ser *relativo* y *específico.*

Peso relativo de un cuerpo es la relacion de su peso absoluto al de otro que se toma por unidad, y se obtiene por medio de la balanza. La unidad de peso es arbitraria; pero generalmente se elige el gramo que es el peso de un centímetro cúbico de agua destilada á 4° sobre cero.

Peso específico de un cuerpo sólido ó líquido, es la relacion de su peso al de un volúmen igual de agua destilada á 4° sobre cero. Cuando se dice que el peso específico de la plata por ejemplo, es 10, significa esto que á volúmen igual la plata pesa 10 veces mas que el agua á 4° sobre cero. El peso es-

pecífico de los gases se determina con relacion al aire á cero grados.

34 **Densidad.**—*Densidad* de un cuerpo es la relacion que existe entre su masa y su volúmen. Si D representa la densidad de un cuerpo, M su masa y V su volúmen, será:

$$D=\frac{M}{V} \text{ (c)}.$$

La densidad absoluta de un cuerpo no puede determinarse. La densidad relativa se encuentra comparando la masa del cuerpo con la de un volúmen igual de agua destilada á 4° sobre cero. Si el cuerpo es gaseoso se compara con el aire.

Siendo los pesos proporcionales á las masas (33), resulta que la relacion entre estos, ó el peso específico, es igual á la relacion entre las masas ó á la densidad. Por esta razon se dice indiferentemente, peso específico ó densidad de un cuerpo, aunque en rigor estas expresiones no signifiquen la misma cosa. En efecto: si no hubiera gravedad no habria peso específico, mientras que la densidad es independiente de esta fuerza y subsistiria sin ella.

35. **Relacion entre los pesos y los volúmenes, y entre los volúmenes y las densidades.**—La fórmula

$$D=\frac{M}{V}$$

da $M=VD$; por consiguiente, si en la fórmula $P=Mg$, se pone en lugar de M, su valor VD, resultará: $P=VDg$; y para otro peso, volúmen y densidad diferentes, P′, V′, D.′ será $P'=V'D'g$ (g es constante). Dividiendo la primera ecuacion por la segunda, y suponiendo $D=D'$, se obtiene:

$$\frac{P}{P'}=\frac{V}{V'};$$

lo que indica, *que á densidad igual los pesos son directamente proporcionales á los volúmenes.* Si P=P', será:

$$\frac{V}{V'}=\frac{D'}{D}$$

esto es, *á peso igual los volúmenes son inversamente proporcionales á las densidades.*

§ 2.° —Centro de gravedad.

36. Definicion del centro de gravedad.—Las acciones de la gravedad sobre cada una de las moléculas de un cuerpo, constituyen un sistema de fuerzas paralelas iguales. El centro de este sistema es el *centro de gravedad* (26). Se ha visto que el centro de las fuerzas paralelas no cambia de posicion cualquiera que sea la direccion que en comun se dé á las fuerzas. Así es que el centro de gravedad es invariable para cada cuerpo, porque aunque es cierto que la pesantez obra siempre en una misma direccion, el cuerpo puede tomar diferentes posiciones, lo que equivale á cambios de direccion de las fuerzas. Por esto se dice: *que el centro de gravedad de un cuerpo es el punto por donde pasa constantemente el peso ó la resultante de las acciones de la gravedad, cualquiera que sea la posicion que se dé á dicho cuerpo.*

37. Determinacion del centro de gravedad.—La determinacion del centro de gravedad en cuerpos homogéneos, ó de una misma densidad en todas sus partes, es una cuestion de Geometría.

Puede decirse desde luego, que en cuerpos ho-

mogéneos que tengan un centro de figura, el centro de gravedad coincide con este centro de figura. Así, el centro de gravedad de un círculo ó de una circunferencia, de una esfera, de una elipse, de un elipsoide, está en el centro de estas figuras ó cuerpos; el de un cilindro recto ó prisma recto, está al medio del eje de estos cuerpos; el de un paralelógramo está en el punto de interseccion de sus diagonales; y el de una línea recta está al medio de esta recta, porque cada partícula de una mitad de la línea es contrabalanceada por su correspondiente partícula en el otro lado.

Demostraremos solamente que: *el centro de gravedad de un triángulo está sobre la recta que une el vértice al medio de la base y al tercio de esta recta al partir de la base.*

En efecto: sea el triángulo ABC (Fig. 26); tírese la recta AE al medio de la base BC. El centro de gravedad debe hallarse en la mediana AE, porque se puede considerar el triángulo como compuesto de líneas de partículas paralelas á BC y cada una de estas líneas quedará dividida en dos partes iguales por la mediana. Por la misma razon el centro de gravedad debe hallarse en la línea BD tirada al medio de AC. Por consiguiente este centro estará en G, punto de interseccion de las dos medianas. Ahora, si se tira la recta CF paralela á BD, siendo $AD=DC$, será: $AG=GF$; pero el triángulo $BEG=CEF$, luego $EG=EF$, de donde $GE=\frac{1}{3}AE$.

El centro de gravedad de una pirámide cualquiera ó de un cono, está en la recta que une el vértice al centro de gravedad de la base y al cuarto de esta recta al partir de la base.

Para determinar experimentalmente el centro de

gravedad de un cuerpo, se le suspenderá por medio de una cuerda en dos posiciones diferentes (Fig. 27). El punto G donde se cortan las dos cuerdas A y B, suponiéndolas prolongadas en el interior del cuerpo, es el centro de gravedad. En efecto: por razon del equilibrio qne se establece entre el peso del cuerpo y la traccion de la cuerda que lo sostiene en las dos posiciones (38), se ve que el centro de gravedad debe hallarse á la vez en las dos líneas que se supone prolongadas en el interior del cuerpo; por consiguiente dicho centro debe estar en el punto de interseccion de estas líneas.

En realidad este procedimiento no puede seguirse sinó para cuerpos muy delgados, como una hoja de papel, una lámina de vidrio, &, porque no es posible conservar las trazas de las líneas en el espesor de cuerpos de algun volúmen; pero da indicaciones importantes acerca del lugar que debe ocupar el centro de gravedad.

§ 3.° —Equilibrio de los cuerpos.

38. Condiciones del equilibrio de los cuerpos.—Para que un cuerpo esté en equilibrio, es preciso que su peso sea destruido por la resistencia de uno ó mas puntos de apoyo.

Con un punto de apoyo el equilibrio se establece cuando el centro de gravedad del cuerpo se halla en la vertical que pasa por el punto de apoyo. Satisfecha esta condicion, el equilibrio se obtendrá, coincida ó no el centro de gravedad del cuerpo con el punto de apoyo. En la figura 28 el centro de gra-

vedad, que está al medio de la recta que une las dos bolas iguales M y N, coincide con el punto de apoyo A. En un baston (Fig. 29) que se mantiene vertical sobre la punta del dedo, el centro de gravedad *g* está encima del punto de apoyo A. Por último en una plomada en quietud (Fig. 25), el centro de gravedad está debajo del punto de apoyo. En estos tres ejemplos la posicion del centro de gravedad varía, pero siempre hay equilibrio porque el centro de gravedad se halla en la vertical que pasa por el punto de apoyo. Con dos puntos de apoyo el equilibrio tiene lugar cuando la vertical que pasa por el centro de gravedad del cuerpo corta á la recta que une los dos puntos de apoyo sobre un plano. El aparato de la Figura 30 está en equilibrio porque la resultante R pasa por el centro de gravedad *g* y corta la línea AB que reune los dos puutos de apoyo sobre el plano MN. Con tres ó mas puntos de apoyo el equilibrio se establece, siempre que la vertical que pasa por el centro de gravedad cae dentro de la base por la cual se apoya el cuerpo.

El cilindro A por ejemplo (Fig. 31), está en equilibrio porque la vertical R que pasa por *g* no sale del círculo de la base; mientras que el cilindro B (Fig. 32), no puede estar en equilibrio porque la vertical R' que pasa por *g'* cae fuera de la base.

No hay pues porqué extrañar, que la torre inclinada de Pisa, que tiene 179 pies de altura, y cuya cima sobresale 13 pies fuera del plano de su base, permanezca en su lugar desde hace muchos siglos. Lo mismo puede decirse de la torre inclinada de Bolonia, que tiene 134 pies de altura y que sobresale de la base 9 pies. En ambas torres la vertica que pasa por el centro de gravedad no sale del pla

no de la base. Parece que los arquitectos han puesto muy bajo el centro de gravedad de estas construcciones, empleando materiales muy pesados al principio de la obra, y mas y mas ligeros á medida que el trabajo ha ido avanzando.

39. **Base de sustentacion.**—Cuando un cuerpo está en equilibrio sobre un plano horizontal, por tres ó mas puntos de apoyo no situados en línea recta, se puede formar un polígono reuniendo estos diferentes puntos. A este polígono ó superficie sobre la cual reposa un cuerpo se da el nombre de *base de sustentacion.*

Cuanto mas extensa es la base de sustentacion de un cuerpo tanto mayor es su estabilidad. Por esta razon es difícil mantener en equilibrio un baston; mientras que una pirámide difícilmente cae. La pirámide es la forma mas estable, y á esto se debe seguramente que las pirámides de Egipto sean unos monumentos tan antiguos que han resistido á tantas causas de destruccion por muchos siglos.

Cuando el hombre está en pié, su base de sustentacion tiene la figura de un trapecio limitado por los dos pies. El máximum de estabilidad se consigue cuando los pies estan separados lateralmente el uno adelante del otro. Puestos uno detras de otro en línea recta ó reunidos por los talones trasversalmente, la estabilidad es muy poca. En el acto de empinarse sobre los dos pies, y sobre todo en uno, la estabilidad está en su mínimum.

Si el hombre agrega á su propio cuerpo un peso extraño, se ve obligado para conservar el equilibrio á tomar ciertas actitudes en que el centro de gravedad de su cuerpo y el peso adicional se halle en la vertical que pasa por dentro de la base de sustenta-

cion. Cuando lleva la carga de espaldas, se inclina hácia adelante; si por delante, se inclina hácia atras; y si lateralmente, inclina el cuerpo al lado opuesto á la carga.

Una persona sentada en una silla no podrá levantarse sin inclinar el cuerpo hácia adelante, llevando así el centro de gravedad sobre la base de los pies; ó bien tendrá que dirigir estos hácia atras, buscando el centro de gravedad del tronco.

40. Diferentes estados de equilibrio.—Los cuerpos presentan tres estados de equilibrio, á saber: *estable, inestable é indiferente.*

1.° —Un cuerpo está en *equilibrio estable* cuando desviado de su posicion de equilibrio vuelve por sí mismo á recobrarla tan luego que no encuentra obstáculo. Se presenta este estado siempre que el centro de gravedad de un cuerpo está mas bajo que en cualquiera otra posicion próxima. En efecto: al menor desvio que se imprima al cuerpo su centro de gravedad se elevará; pero como la pesantez obra constantemente de arriba abajo para hacer descender este centro, lo traerá necesariamente á su posicion primitiva y por consiguiente el equilibrio se restablecerá. Es lo que sucede en una plomada desviada de la vertical y abandonada en seguida á sí misma; oscilará algun tiempo, porque la pesantez tiende á llevar el centro de gravedad lo mas bajo posible, pero al fin se restituirá á su posicion de equilibrio.

Se construyen varios juguetes que difícilmente caen por estar el centro de gravedad debajo del punto de apoyo. La Figura 33, por ejemplo, se mantiene sobre el apoyo A aunque se desvie un tanto de su posicion de equilibrio, haciendo que el centro

de gravedad *g* de todo el sistema se encuentre debajo del punto de apoyo, para lo cual basta poner dos bolitas iguales de plomo ó cera, M, N. Otro ejemplo de equilibrio estable es el de dos cuchillos ó tenedores clavados en un pedazo de corcho (Fig. 24), de modo que formen ángulos agudos con un alfiler que se clava en el corcho y que se apoya por su cabeza sobre un objeto cualquiera, una copa boca abajo por ejemplo; el peso de los tenedores hará descender el centro de gravedad mas abajo que el punto de apoyo. Un cono (Fig. 35) que reposa por su base sobre un plano, está igualmente en equilibrio estable.

2. ○ —Un cuerpo está en *equilibrio inestable* cuando desviado de su posicion de equilibrio, en vez de recobrarla tiende á separarse mas y mas de ella. Este estado se presenta siempre que el centro de gravedad de un cuerpo se halla mas arriba que en cualquiera otra posicion próxima. En efecto: al menor desvío que se dé al cuerpo en este estado, bajando así su centro de gravedad, la pesantez tiende á bajarlo mas y mas. Un baston que se tiene en equilibrio sobre la punta del dedo (Fig. 29), un cono que reposa por su vértice en un plano (Fig. 35), son ejemplos de equilibrio inestable. En ambos casos, tan luego que estos cuerpos se desvian de la vertical, el centro de gravedad desciende y el cuerpo no vuelve á su posicion primitiva.

3. ○ —En fin un cuerpo está en *equilibrio indiferente* cuando el equilibrio persiste en todas las posiciones que quiera dársele. Este estado se presenta siempre que el centro de gravedad no sube ni baja en todas las posiciones del cuerpo. Por ejemplo, una esfera que reposa sobre un plano, un cono que

se apoya por uno de sus lados (Fig. 35) estan en equilibrio indiferente.

41. **Paradoja dinámica.**—La tendencia del centro de gravedad á ocupar el punto mas bajo explica la paradoja dinámica de que una esfera, aparentemente homogénea, se eleve girando sobre sí misma sobre un plano inclinado. Sea una bola de madera ligera M (Fig. 36) cargada de plomo por un lado, de suerte que el centro de gravedad *g* esté fuera del centro de figura y muy cerca de la carga de plomo. Asi construida la bola, rodará sobre el plano en la direccion de la flecha, hasta que el centro de gravedad haya tocado el punto mas bajo como se ve en la posicion N.

CAPITULO VI.

LEYES DE LA CAIDA DE LOS CUERPOS.—PÉNDULO.

§ 1.° —Leyes de la caida de los cuerpos.

42. **Ley 1ª**— *Todos los cuerpos caen al mismo tiempo en el vacío, cualesquiera que sean su masa y su naturaleza.*

Si un cuerpo está compuesto de moléculas de la misma naturaleza, la fuerza de gravedad obra con la misma intensidad sobre cada una de ellas, impri-

miéndoles igual velocidad. De suerte que estas moléculas caen, cuando estan unidas entre sí formando el cuerpo, como si estuviesen separadas ó como una sola. Si las moléculas del cuerpo no son homogéneas se demuestra igualmente que todas caen con la misma velocidad. Al efecto, se toma un tubo de vidrio (Fig. 37) de dos metros de longitud, cerrado por una extremidad y provisto en la otra de una llave. Se introducen en este tubo cuerpos de diferente naturaleza y densidad como corcho, papel, plomo, médula de sauco, &, y se le extrae el aire por medio de la máquina neumática. Si entónces se invierte repentinamente el tubo, se verá que todos estos cuerpos caen al mismo tiempo ó con igual velocidad. Introduciendo un poco de aire en el tubo se nota al invertirlo de nuevo un retraso en la caida de los cuerpos mas ligeros, retraso que se hace muy aparente cuando ha entrado todo el aire en el tubo, pues este fenómeno depende de la resistencia de dicho fluido.

La ley en cuestion se demuestra tambien por un experimento muy sencillo. Se toma un disco metálico, un peso fuerte por ejemplo, y se coloca sobre él un disco de papel del mismo diámetro, ú otra sustancia ligera. Dejando caer el todo, como lo muestra la Figura 38 se observará que los cuerpos llegan al mismo tiempo al suelo, porque la resistencia del aire no se ejerce sobre el disco de papel ó la sustancia ligera puesta sobre la moneda, como sucederia si cayesen separadamente, en cuyo caso caeria primero la moneda y despues el papel ó sustancia ligera.

Es tambien la resistencia del aire la causa de que los líquidos que caen de cierta altura en la atmósfe-

ra, se dividan en muchas partes, pues esta division no tiene lugar en el vacío. Esto se demuestra por medio del *martillo de agua*, que es un tubo de vidrio donde se ha hecho el vacío y que contiene un poco de agua (Fig. 39); si este tubo se invierte con rapidez, el agua cae sin dividirse, produciendo un golpe seco al chocar en el otro extremo del tubo.

El descubrimiento de esta ley se debe á Galileo quien, dejando caer de lo alto de la catedral de Pisa varias bolitas del mismo volúmen y de densidades diferentes, observó que todas ellas llegaban casi al mismo tiempo al suelo, y que el pepueño retraso de las mas ligeras dependia de la resistencia del aire. Y como este experimento desmentia la opinion de Aristóteles, quien decia, que la velocidad del descenso es proporcional al peso de los cuerpos, los filósofos de Pisa se sublevaron contra Galileo y le obligaron á huir á Padua.

43. Ley 2ª—*Los espacios recorridos por un cuerpo que cae en el vacio, partiendo del estado de reposo, son proporcionales á los cuadrados de los tiempos empleados en recorrerlos.*

Para explicar esta ley supongamos que un cuerpo desciende segun la vertical AB (Fig. 40), y que en el 1er segundo de su caida libre recorra el espacio Ab; en 2 segundos, partiendo del mismo punto A, recorrerá tantos espacios iguales á Ab como el cuadrado de 2, es decir 4Ab=Ac; en 3 segundos recorrerá tantos espacios iguales á Ab como el cuadrado de 3, esto es 9Ab=Ad, y así sucesivamente.

De esta ley se deduce: *que los espacios recorridos en las unidades de tiempo sucesivas, son entre sí como la serie natural de los números impares.* En efecto: observemos que en 2 unidades de tiempo el cuerpo

recorre $4Ab$, pero como en la primera unidad recorre Ab, en la segunda unidad habrá recorrido $4Ab—Ab=3Ab$; en 3 unidades de tiempo recorre $9Ab$, pero como en las dos primeras recorre $4Ab$, en la tercera habrá recorrido $9Ab—4Ab=5Ab$; sucesivamente los espacios seran $16Ab—9Ab=7Ab$, $25Ab—16Ab=9Ab$, &. Se ve, pues, que los espacios recorridos en cada unidad de tiempo sucesiva son como los números 1, 3, 5, 7, 9, &.

44. **Ley 3ª**—*La velocidad adquirida por un cuerpo que cae en el vacío, partiendo del estado de reposo, es proporcional al tiempo durante el cual cae.*

Es decir, que despues de 2, 3, 4, &, segundos de caida libre, la velocidad ó el espacio recorrido por el cuerpo en un segundo con movimiento uniforme (2), es doble, triple, cuádrupla.

Comprobacion de la segunda y tercera ley.—Estas leyes no pueden comprobarse experimentalmente por la observacion de la caida ordinaria de los cuerpos; pues verificándose ésta con suma rapidez no es posible determinar con exactitud la relacion que existe entre los espacios y los tiempos. De aquí ha venido la necesidad de construir ciertos aparatos que produzcan un descenso lento, sin modificar las leyes de la pesantez. Los mas usados son: el *plano inclinado de Galileo* y la *máquina de Atwood.*

1.° —*Plano inclinado.* Todo plano tal como AB (Fig. 41), que con un plano horizontal AC forma un ángulo BAC menor que un recto, es un *plano inclinado.* AB es la *longitud* del plano, BC su *altura* y AC su *base.*

Un cuerpo desciende con mas lentitud por un plano inclinado que verticalmente, y cuanto menor sea el ángulo de inclinacion, tanto mas lento será el

descenso. Sea por ejemplo un cuerpo M colocado sobre el plano AB, cuyo peso representaremos por P. Esta fuerza ó peso puede descomponerse en dos, la una Q perpendicular al plano, y la otra F paralela al mismo. La primera quedará destruida por la resistencia del plano, y la segunda obrará sobre el cuerpo para hacerlo descender. Puede determinarse el valor de esta fuerza F, construyendo el paraleló-gramo *o s t n*. En efecto: los triángulos semejantes *ost*, ABC, dan:

$$\frac{os}{ot}=\frac{BC}{AB} \text{ ó } \frac{F}{P}=\frac{BC}{AB}.$$

Es decir, que F será tanto menor con respecto á P, cuanto la altura BC del plano, lo sea con respecto á la longitud AB. De consiguiente se puede disminuir á voluntad la velocidad de la caida del cuerpo M, haciendo la fuerza F tan pequeña como se quiera. Esta lentitud en el descenso en nada cambiará las leyes del movimiento, puesto que la fuerza F es contínua y constante.

Galileo se servia en sus experimentos de una cuerda inclinada de diez á doce metros de longitud fuertemente tensa entre dos puntos A y B (Fig. 42), uno mas alto que otro. Sobre esta cuerda hacia descender, á manera de un carrito, dos pequeñas poleas *m* y *m'* unidas por una chapa provista de un peso P, que les impedia caer por los lados. Así notó, que los espacios recorridos en 1, 2, 3, &, segundos, al partir desde el principio del movimiento, eran proporcionales á los cuadrados de los tiempos.

2. ° —*Máquina de Atwood.* Las leyes de la caida de los cuerpos se estudian mas fácilmente y con mas exactitud por medio de la máquina de Atwood, apa-

rato inventado por un físico ingles del mismo nombre.

Esta máquina consiste en una columna de madera (Fig. 43), que lleva á su parte superior dentro de una caja de vidrio una polea *a*. muy movible mediante el juego de un sistema particular de ruedas. Un hilo de seda muy fino se arrolla á la garganta de la polea y lleva á sus extremidades dos pesos iguales M y M.' Paralelamente á la columna hay una regla L dividida en milímetros que sirve para medir los espacios que recorre la masa M. A esta regla pueden adaptarse, á la altura que se quiera por medio de tornillos de presion, dos correderas, una plana *s* destinada á detener la masa que desciende, y la otra anular *s*' que permite el paso de la masa M, pero que impide el de una pequeña masa adicional *m* mas larga que el diámetro de la corredera. El tiempo se mide por un reloj de segundos R, que está en relacion por medio de una palanca con una pieza metálica *p*, que sirve para sostener las masas juntas M y *m*, frente al cero de la escala. En un instante dado la pieza metálica desciende instantaneamente, el peso cae y el reloj sigue marcando los segundos durante toda la caida.

Por medio de la máquina de Atwood se puede obtener un descenso tan lento como se quiera. En efecto: siendo iguales las dos masas M y M' la pesantez no produce efecto alguno sobre ellas, puesto que se equilibran, cualquiera que sea la posicion relativa que se les dé; pero si se coloca sobre la masa M una pequeña masa *m*, el equilibrio se rompe y las dos masas unidas por el hilo son arrastradas por la masa *m*. En consecuencia, la masa *m* perderá de la velocidad que le imprime la pesantez, tanto cuanto co-

munica á las masas M y M' que arrastra, y su descenso será lento. Se puede determinar por el cálculo esta disminucion de velocidad. Sea g la velocidad adquirida al cabo de un segundo por la masa m, cayendo sola; y x la velocidad adquirida al cabo del mismo tiempo cuando desciende juntamente con las masas M y M.' La cantidad de movimiento en los dos casos será la misma, puesto que sirve de medida á una fuerza invariable que es la accion de la gravedad sobre la masa m. Siendo, pues, gm la cantidad de movimiento de la masa m, y $(m+2M)x$ la de todo el sistema, se tendrá:

$$(m+2M)x=gm; \text{ de donde}$$

$$x=\frac{gm}{m+2M}.$$

Si se supone por ejemplo, que las masas M y M' sean cada una de 49,5 gramos, siendo m de 1 gramo, será:

$$x=\frac{g}{1+2\times 49,5}=\frac{g}{100}.$$

Es decir, que la velocidad en este caso será 100 veces menor que la del descenso libre en la atmósfera; así, la resistencia del aire viene á ser casi nula.

Conocido el mecanismo de la máquina de Atwood, vamos á indicar sus usos.

Para comprobar la ley de los espacios, se comienza por detener el péndulo, poniendo la aguja del cuadrante fuera del cero. En seguida se coloca el peso adicional m sobre la masa M, y se pone esta así cargada sobre la pieza metálica p mantenida horizontalmente, y correspondiendo al cero de la escala. En este estado se mueve el péndulo y al llegar la aguja al cero del cuadrante, la masa $M+m$ cae instantaneamente. Entónces es preciso buscar por en-

sayós sucesivos el punto de la regla graduada donde debe fijarse la corredera sólida, para que el segundo golpe del reloj, al partir del cero, coincida con el choque que la masa $M+m$ debe producir sobre dicha corredera. Se determinará así un espacio, del cero de la escala á la corredera, que es el espacio recorrido en un segundo. Se vuelve á dar principio al experimento, fijando la corredera á una distancia cuádrupla, y se reconocerá que el choque de la masa coincide con el tercer golpe de reloj; es decir, que el espacio recorrido en 2 segundos es cuádruplo del recorrido en uno. Puesta la corredera á una distancia 9 veces mayor, este espacio será recorrido en 3 segundos, y asi sucesivamente.

Para comprobar la ley de las velocidades, se fija la corredera anular en el punto de la escala á donde llegan las dos masas M y *m* reunidas despues de un segundo de caida, como en el experimento anterior, y la corredera sólida se pone á una distancia de la anular, doble de la que separa á esta última del cero de la escala. Dejando entónces partir el sistema, se observa que el segundo golpe de reloj coincide con el choque de la masa *m* sobre la corredera anular cuya masa es detenida por su forma alargada. Al partir de este instante el movimiento es uniforme, en virtud de la inercia ó velocidad adquirida, y el espacio recorrido entónces en un segundo mide la velocidad del sistema al momento en que la masa *m* es detenida. Se encuentra así que el tercer golpe coincide con el choque de la masa M sobre la corredera sólida; la distancia, pues, que separa las dos correderas es la velocidad adquirida al cabo de un segundo.

Repitiendo el experimento de modo que el siste-

ma emplee 2 segundos en descender del cero de la escala á la corredera anular, se hallará que el espacio rocorrido durante un segundo, de la corredera anular á la sólida, es doble del que ántes se habia obtenido despues de un segundo de caida acelerada, y así sucesivamente.

Tambien puede comprobarse por la máquina de Atwood, que el espacio recorrido durante la primera unidad de tiempo es la mitad de la velocidad adquirida durante esta unidad de tiempo (10).

46. Fórmulas de la pesantez.—Los experimentos precedentes prueban que la pesantez es una fuerza aceleratriz constante y que se ejerce sobre todo cuerpo de cualquiera forma ó naturaleza que sea. Así, las leyes del movimiento debido á la pesantez se expresan por las fórmulas generales del movimiento uniformemente variado (10). De suerte que si e representa el espacio ó la altura del descenso, t el tiempo, y v la velocidad, siendo g la intensidad de la pesantez ó la aceleracion que ella produce en un segundo, las fórmulas del descenso de los graves seran:

$$(j)\ v=gt;\quad (k)\ e=\tfrac{1}{2}gt^2,\quad (l)\ v=\sqrt{2ge.}$$

Si el cuerpo ha recibido desde el principio una impulsion a, será:

$$v=a\pm gt;\quad e=at\pm\tfrac{1}{2}gt^2;\quad v=\sqrt{a^2\pm 2ge.}$$

El signo + corresponde al caso en que el cuerpo es lanzado de arriba abajo, y el signo — al caso contrario.

§ 2.° —Péndulo.

47. Definicion del péndulo.—Se da el nombre de

péndulo á un punto material pesado suspendido por un hilo inextensible y sin peso á un punto ó eje fijo, al rededor del cual puede girar ú oscilar libremente. Este punto fijo se llama *centro de suspension*, y si es un eje, *eje de suspension.*

Así definido el péndulo se llama *simple* ó *ideal*, que es irrealizable y solo se considera para la determinacion de sus leyes. El solo péndulo que pueda realizarse es el *péndulo compuesto*, que se forma generalmente de un cuerpo lenticular ó esférico suspendido á una varilla pesada, movible al rededor de un punto ó eje horizontal.

Fácil es explicar el movimiento oscilatorio de un péndulo. Sea el péndulo simple *c*M (Eig. 44); *c* es el centro de suspension y M el punto material. Si el péndulo se separa de su posicion vertical ó de equilibrio *c*M, trayéndolo á la posicion *cm*, el peso P del punto material se descompondrá en dos fuerzas: la una *mb* dirigida segun la prolongacion *cm* y que será destruida por la resistencia del hilo en el punto *c*, y la otra *me* tangente al arco *m*M*m'*, que solicitará el punto material, abandonado á sí mismo, á descender de *m* hasta su primitiva posicion *c*M. Por la simple inspeccion de la figura se ve que esta fuerza *me* que es igual á $mo \times sen.a$, (llamando *a* al árgulo $moe = mc$M) va disminuyendo á medida que el punto material se aproxima á la vertical *c*M donde es nula; de suerte que el movimiento acelerado que se produce es debido á una fuerza contínua, pero no constante.

Llegado á la posicion vertical, el péndulo no se detiene, pues en virtud de su inercia ó velocidad adquirida sube de M á *m'* con un movimiento retardado, porque la componente de la pesantez tangente

al arco descrito está entónces dirigida en sentido contrario al movimiento; de modo que la velocidad en cada punto del arco Mm' va disminuyendo tanto cuanto habia aumentado en los puntos correspondientes del arco mM y será nula cuando el punto M haya recorrido el arco Mm' igual á mM En el punto m' habrá un instante imperceptible de reposo, despues del cual el péndulo volverá á recorrer el arco hasta *m;* luego, volverá á m' y así sucesivamente, continuando el movimiento de un modo indefinido sinó hay resistencias.

Se llama *oscilacion* del péndulo, su movimiento de una posicion extrema *m* á la otra m'; y el ángulo mcm' ó su arco mm' es la *amplitud de la oscilacion.*

La *longitud* del péndulo simple es la distancia que hay del centro de suspension al centro de oscilacion, cuyo centro se halla en el punto material mismo.

48. Leyes del péndulo y su fórmula.—Las leyes del péndulo simple en el vacío son las siguientes:

1.ª *La duracion de las pequeñas oscilaciones es independiente de su amplitud.*—Es decir, que las pequeñas oscilaciones son *isócronas* ó de igual duracion, con tal que la amplitud no pase de 4 á 5 grados.

El descubrimiento de esta ley, lo mismo que el de otras propiedades del péndulo, se debe á Galileo, quien á la edad de 18 años se fijó en la regularidad oscilatoria de una lámpara suspendida en la bóveda de una iglesia de Pisa. En esta misma propiedad se funda la aplicacion que Huyghens hizo del péndulo á los relojes.

2.ª *La duracion de las oscilaciones es independiente del peso y naturaleza de la sustancia de que está formado el péndulo.*—Es decir, que péndulos de

igual longitud ejecutan el mismo número de oscilaciones en el mismo tiempo, cualquiera que sea la sustancia de que está formado el punto material, ya sea cobre, plomo, corcho, &, ú otra materia.

3.ª *Las duraciones de las oscilaciones de dos ó mas péndulos, son proporcionales á las raíces cuadradas de sus longitudes.*—Por ejemplo: las duraciones de las oscilaciones de cuatro péndulos cuyas longitudes sean como los números 1, 4, 9, 16, seran entre sí como los números 1, 2, 3, 4, que son las raices cuadradas de aquellos números.

4.ª *Para un mismo péndulo, á diferentes latitudes, la duracion de las oscilaciones está en razon inversa de la raíz cuadrada de la intensidad de la gravedad.*

Todas estas leyes se demuestran por la experiencia con péndulos bien construidos que llenen en cuanto sea posible las condiciones del péndulo simple.

Las leyes del péndulo estan expresadas por la fórmula

$$t=\tilde{n}\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (m)$$

en la cual t representa la relacion de una oscilacion, l la longitud del péndulo, g la intensidad de la gravedad y $\tilde{n}$ la relacion de la circunferencia al diámetro que es de 3,14159. (4)

En esta fórmula no entran ni la amplitud de la oscilacion ni la sustancia de que está formado el punto material; por consiguiente el tiempo t es com-

---

(4) A falta del tipo griego *pi*, hemos adoptado la letra $\tilde{n}$.

pletamente independiente de ambos elementos, y por esto se ve, cómo las dos primeras leyes estan contenidas en la fórmula. Las otras dos se deducen de la misma fórmula, puesto que

$$\frac{l}{g}$$

está bajo el radical.

49. Péndulo compuesto.—Los péndulos compuestos se forman de una masa esférica ó lenticular suspendida á una varilla ó hilo material, móvil al rededor de un eje horizontal.

El centro de oscilacion de un péndulo compuesto no se encueutra como en el simple en el punto material mismo, sinó entre éste y el eje de suspension. Se puede concebir la existencia de este punto, considerando que las diferentes moléculas del péndulo compuesto oscilarian en tiempos diferentes si estuviesen independientes unas de otras, de suerte que las mas cercanas al eje de suspension oscilarian con mas velocidad que las mas distantes (48. Ley 3ª); pero como estas moléculas estan íntimamente ligadas entre sí, formando el hilo ó varilla, deben oscilar en el mismo tiempo, y por consiguiente se hace necesaro que el movimiento de las mas cercanas al eje de suspension se retarde y que el de las mas distantes se acelere. Entre las primeras y las segundas deben haber, pues, ciertas moléculas cuyo movimiento ni se retarde ni se acelere y que oscilen como si estuviesen solas. A estos puntos que constituyen un eje paralelo al eje de suspension, es á lo que se da el nombre de *eje de oscilacion* del péndulo compuesto. El punto donde este eje corta al plano vertical perpendicular al eje de suspension y que pasa por el centro de gravedad del péndulo, se llama

centro de oscilacion del péndulo compuesto. La distancia del eje ó centro de oscilacion al eje ó centro de suspension es la *longitud de oscilacion* ó simplemente la *longitud del péndulo compuesto.*

En las aplicaciones del péndulo es de la mayor importancia y necesidad determinar la duracion de la oscilacion y la longitud del péndulo compuesto.

La duracion de una oscilacion se determina, contando un gran número de oscilaciones en un tiempo dado, y dividiendo este tiempo por dicho número de oscilaciones. Tambien se emplea el *método de las coincidencias* de Borda.

La longitud del péndulo se halla por la experiencia, fundándose en esta propiedad demostrada por Huyghens: *el eje de suspension y el eje de oscilacion son recíprocos.* Es decir, que haciendo oscilar un péndulo y en seguida invirtiéndolo, de modo que quede suspendido por su eje de oscilacion, la duracion de las oscilaciones queda la misma, lo que indica que la longitud no ha cambiado. Se hace pues oscilar un péndulo por cierto tiempo; en seguida se invierte, fijándolo por tanteos á una distancia tal del eje de suspension primitivo, que en esta nueva posicion el número de oscilaciones en el mismo tiempo sea el mismo que ántes de la inversion. Por este procedimiento se determinará un eje, que será el eje de oscilacion paralelo al eje primitivo, y por consiguiente se tendrá la longitud del péndulo, que es la distancia del uno al otro eje. El péndulo del Capitan Kater ó *péndulo reversible*, fundado en esta reciprocidad de los ejes, sirve perfectamente para la determinacion de la longitud del péndulo.

Un péndulo que fuese formado de un hilo muy fino al cual estuviese suspendida una esfera muy pe-

sada, de platino, por ejemplo, podria considerarse como un péndulo simple. Su longitud seria la distancia del eje de suspension al centro de la esfera. Tal es el péndulo de Borda ó *péndulo absoluto*.

50. Medida de la intensidad de la pesantez.— Se puede determinar por medio del péndulo el valor de la intensidad de la pesantez en un lugar cualquiera de la tierra. Para esto se resuelve la fórmula del péndulo con relacion á g, lo que da

$$g=\frac{\tilde{n}^2 l}{t^2}.$$

Basta, pues, para hallar el valor de g, determinar los valores l y t como ántes se ha indicado. La intensidad de la pesantez es

en Paris$=9,^{m}808$, ó mas exactamente segun el Señor Bessel, $9,^{m}8096$,

en Madrid$=9,^{m}80415$ (Císcar),

en el Ecuador$=9,^{m}7815$,

en Rio Janeiro$=9,^{m}7876$,

Esta fuerza crece del Ecuador á los polos, no solo por razon del aplanamiento de la tierra, sino tambien por efecto de la disminucion de la fuerza centrífuga debida á la rotacion de la misma (55).

Si en la fórmula anterior

$$g=\frac{\tilde{n}^2 l}{t^2}$$

se supone $t=1$ segundo, se tendria: $g=\tilde{n}^2 l$: de donde

$$l=\frac{g}{\tilde{n}^2},$$

fórmula que da el valor de la longitud del péndulo de segundos. Así, para Madrid por ejemplo, esta longitud será:

$$l=\frac{9,^{m}80415}{(3,14159)^2}=0,^{m}99338.$$

En Paris es $l=0,^{m}993866$, como puede comprobarse.

CAPITULO VII.

MOVIMIENTO CURVILINEO.

51. **Definicion.**—Cuando un cuerpo es lanzado en el espacio con cierta velocidad, sigue moviéndose en línea recta en virtud de la inercia; pero si una fuerza extraña continua y no dirigida en la misma direccion del movimiento interviene, el cuerpo tiende á separarse constantemente de su direccion primitiva y acaba por describir una curva. Este movimiento es el *movimiento curvilíneo.*

52. Movimiento parabólico.—Sea por ejemplo un proyectil *a* (Fig. 45), lanzado horizontalmente segun la direccion *af* por una fuerza instantánea. Si este cuerpo no estuviera sujeto á la accion de la pesantez, continuaria moviéndose uniformemente en línea recta, de suerte que al fin de cada unidad sucesiva de tiempo se hallaria en los puntos *b*, *c*, *d*, &; pero si solo estuviera bajo la accion de la pesantez descenderia por la vertical *as* de modo que al fin de la primera unidad de tiempo estaria en *p*, al fin de la segunda en *q*, y á la tercera en *r* (los espacios *ap*, *aq*, *ar*, son como los números 1, 4. 9). Pero actuando las dos fuerzas al mismo tiempo, es decir, la fuerza de proyeccion horizontal y la pesantez, el cuerpo

tiene que hallarse al cabo de la primera, segunda, tercera, unidades sucesivas de tiempo, en los puntos respectivos a', a'', a''', que son los extremos de las diagonales de los paralelógramos construidos sobre las fuerzas. Ahora bien, siendo la gravedad una fuerza contínua, los instantes sucesivos durante los cuales obra seran infinitamente pequeños y por consiguiente las diagunales seran infinitamente pequeñas; luego uniendo esta serie de puntos se formará una curva que no será otra cosa que la parábola, pues sus abcisas son proporcionales á los cuadrados de las ordenadas. En efecto se tiene:

$$ab : ac : ad :: 1 : 2 : 3;$$
$$ap : aq : ar :: 1 : 4 : 9.$$

Cuadrando los términos de la primera proporcion y comparándola con la segunda, se obtiene:

$$ap : aq : ar :: ab^2 : ac^2 : ad^2.$$

Se puede probar por la experiencia que un cuerpo lanzado horizontalmente describe una parábola. Sobre un cuadro de madera (Fig. 46) se trazan, partiendo del punto A, varias parábolas; al lado de este punto está una pieza de madera M que sobresale del cuadro, teniendo una ranura longitudinal dispuesta de manera que una bola que la recorre bajo la accion de la pesantez llegue abajo con cierta velocidad horizontal, y que el centro de esta bola quede al nivel del punto A al momento en que se separa de la ranura. Dejando rodar la bola sobre la ranura, de alturas diferentes, se llegará al fin por tanteos á darle una velocidad tal que pueda recorrer una de las parábolas, y entónces se la verá pasar por una serie de anillos fijos á todo lo largo de esta curva.

53. Movimiento circular.—Si un cuerpo M (Fig. 47) sujeto por una cuerda á un punto fijo G, se mue-

ve con cierta aceleracion segun la direccion MR, y no está sometido mas que á la accion de la fuerza aceleratriz, describirá un círculo cuyo centro es *c* y su radio GM. La cuerda en este caso obra constantemente sobre el cuerpo obligándolo á recorrer la circunferencia, de la cual tiende por la impulsion primitiva á separarse segun la tangente MR. Esta accion ó fuerza representada por la cuerda que impide al cuerpo separarse de la circunferencia y lo solicita hácia el centro, se llama *fuerza centrípeta;* y la tendencia del móvil á escaparse del centro, se llama *fuerza centrífuga.* Estas dos fuerzas se equilibran durante todo el movimiento, y juntas se denominan *fuerzas centrales.*

Cuando se da vueltas rápidamente á una honda, los hilos se ponen tensos por efecto de la fuerza centrífuga, y si entónces se suelta uno de ellos la piedra se escapa tangencialmente á la circunferencia, describiendo en seguida una parábola *ab* (Fig. 48) bajo la accion de la pesantez hasta llegar á su destino.

54. Cálculo de las fuerzas centrales.—Se puede determinar por el cálculo el valor de la fuerza centrípeta ó el de su igual la centrífuga. Sea F (Fig. 47) la fuerza centrípeta de un móvil, que describe un arco MN infinitamente pequeño, con movimiento uniforme, durante un tiempo *t* tambien infinitamente pequeño. En este mismo tiempo el móvil recorrerá por la accion sola de la fuerza centrípeta. el espacio MD, con movimiento uniformemente acelerado, porque esta fuerza es de intensidad constante durante el tiempo *t*. Se tendrá, pues, $MD=\frac{1}{2}Ft^2$ (10).

Considerando ahora que el arco MN se confunde por su pequeñez con su cuerda; segun una propie-

dad conocida del círculo será:

$$MD=\frac{MN^2}{2R} \text{ (llamando R al rádio MG).}$$

Y siendo el movimiento uniforme se tendrá: $MN=v\times t$ (llamando v á la velocidad del móvil), de donde

$$MD=\frac{v^2\,t^2}{2R}.$$

Sustituyendo este valor en la ecuacion $MD=\frac{1}{2}Ft^2$, y sacando el valor de F, será:

$$F=\frac{v^2}{R}.$$

Es decir: *que la fuerza centrífuga en el movimiento circular es igual al cuadrado de la velocidad dividido por el radio del círculo descrito.*

En el cálculo anterior hemos considerado el móvil como la unidad de masa; pero si su masa fuese m, por ejemplo, la fórmula seria

$$F=m\frac{v^2}{R} \quad \text{(n)}$$

Esta fórmula puede ponerse bajo otra forma independiente de la velocidad. En efecto: si T representa el tiempo que el móvil emplea en recorrer la circunferencia con la velocidad v, siendo el movimiento uniforme, la circunferencia será igual á vT, esto es, $2\pi R=vT$; de donde

$$v=\frac{2\pi R}{T}.$$

Sustituyendo este valor en la fórmula (n), resultará:

$$F=\frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad \text{(o)}$$

Es decir: *que la fuerza centrífuga está en razon directa de la masa y del radio, y en razon inversa del*

cuadrado del tiempo que el móvil emplea en hacer una revolucion completa.

55. Valor de la atraccion terrestre. — La fuerza centrífuga que se desarrolla por el movimiento de rotacion de la tierra, está en su máximum en el ecuador y va disminuyendo progresivamente hácia los polos donde es nula. Segun esto, la pesantez en un punto cualquiera es la diferencia entre la atraccion total de la tierra y la fuerza centrífuga de aquel punto. Comencemos, pues, por determinar el valor de la pesantez en un punto m (Fig. 49) situado sobre un paralelo cuyo radio es mb ó r (ce es el radio ecuatorial). Sea ms la fuerza centrífuga de este punto. Entónces, se tendrá (54 form. o):

$$ms = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Descompongamos esta fuerza ms, que no está directamente opuesta á la pesantez, en dos fuerzas: la una mp perpendicular al radio cm ó á la pesantez, y sin efecto sobre ella, y la otra mo en direccion del radio cm. Esta última fuerza tiene por expresion, $mo = ms \times \cos. a$ (llamando a al ángulo oms que es igual al ángulo mce ó la latitud del punto m). Sustituyendo en esta ecuacion el anterior valor de ms, será:

$$mo = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \cos. a;$$

y como el triángulo rectángulo bcm, dá $bm = r = R \cos. a$ ($cm = R$, y ang. $bmc = a$), sustituyendo este valor de r en la fórmula que precede se obtendrá:

$$mo = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \cos.^2 a;$$

fórmula que da el valor de la fuerza centrífuga opuesta á la gravedad en cualquiera latitud.

Representando, pues, G por la atraccion terrestre, se tendrá para el valor g de la pesantez

$$g = G - \frac{4\pi^2 R}{T^2} \cos.^2 a;$$ y en el ecuador,

$$g = G - \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

De la última ecuacion resulta (trasponiendo y cambiando signos)

$$G = g + \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

que es el valor de la atraccion terrestre en el ecuador. Y como $g = 9^m, 7815$ (50), $\pi = 3,14159$, el radio ecuatorial ó $R = 6376984^m$, y $T = 86164^s$, será:

$$G = 9^m,7815 + \frac{4 \times (3,14159)^2 \times 6376984^m}{(86164^s)^2} = 9^m,8154.$$

CAPITULO VIII.

CHOQUE DE LOS CUERPOS.

56. Definicion.—Choque es el encuentro instantáneo de dos cuerpos en movimiento, ó de un cuerpo en movimiento con un cuerpo en reposo.

Los efectos del choque varían, segun que se verifica entre cuerpos elásticos ó entre cuerpos desprovistos de elasticidad.

Los cuerpos elásticos comprimidos bajo la accion

de una fuerza, recobran su forma ó volúmen primitivo tan luego que ha cesado la fuerza de compresion. Los no elásticos, ó no ceden á la compresion y en este caso se llaman *duros*, ó si ceden no vuelven á su forma primitiva y entónces se llaman *blandos*.

Tambien dependen los efectos del choque de que sea *directo ú oblicuo*.

El choque es directo cuando se verifica segun nna línea recta que pasa por los centros de gravedad de los cuerpos que se chocan, línea que debe ser normal á las superficies por donde el choque se efectúa. El choque es oblicuo cuando no llena estas condiciones.

Trataremos desde luego del choque directo, suponiendo esféricos los cuerpos para mayor facilidad.

57. Cuerpos elásticos.—Sean dos cuerpos no elásticos M y M' (Fig. 50) que se mueven en la misma direccion *ab* con las velocidades respectivas V y V', siendo V>V.' Cuando el cuerpo M, por su mayor velocidad, haya alcanzado al cuerpo M', lo impulsará hácia adelante en la direccion de la flecha, hasta que ambos adquieran la misma velocidad; pero en virtud de la inercia la cantidad de movimiento ganada por el cuerpo M' debe ser igual necesariamente á la cantidad de movimiento perdida por el cuerpo M. Designando, pues, por v la velocidad comun despues del choque, la velocidad perdida por el cuerpo M será $V-v$, y la adquirida por el cuerpo M' será $v-V'$; por consiguiente se tendrá: $M(V-v)=M'(v-V')$, de donde

$$v=\frac{MV+M'V'}{M+M'}. \quad (1)$$

Si el cuerpo M' se mueve en direccion contraria, es decir, si marcha al encuentro de M, entónces de-

berá cambiarse el signo de V' y la velocidad comun será:

$$v=\frac{MV-M'V'}{M+M'}.$$

En este último caso, cuando $MV=M'V'$ ó $M:M'::V':V$, resulta $v=0$, es decir: *que cuando las velocidades estan en razon inversa de las masas, estas quedan en reposo despues del choque.*

Si $V'=0$ y $M=M'$, la velocidad se convierte en

$$v=\frac{V}{2},$$

lo que indica: *que si uno de los cuerpos está en reposo, y ademas son de igual masa, los dos se moveran despues del choque con una velocidad igual á la mitad de la velocidad del cuerpo chocante.*

Si $V'=0$ y $M'=\infty$, será:

$$v=\frac{MV}{M+\infty},$$

es decir: *que si el cuerpo chocado está en reposo y es infinitamente grande* (un plano fijo, por ejemplo) *respecto al cuerpo chocante, este último quedará en reposo despues del choque.*

58. Cuerpos elásticos.— Sean dos cuerpos elásticos M y M' (Fig. 51) que se mueven en la direccion de la flecha animados de las velocidades respectivas V y V', siendo $V>V'$. Al verificarse el choque se comprimiran mutuamente los dos cuerpos hasta que hayan adquirido una misma velocidad; pero no se terminará aquí el choque, pues en virtud de su elasticidad estos cuerpos tenderan á recobrar su primitiva forma con una fuerza precisamente igual á la de compresion. El cuerpo M obrará, pues, de nuevo sobre M' con la misma fuerza que al principio, y á su vez M' hará una reaccion igual.

La velocidad del cuerpo M seguirá disminuyendo y la de M' aumentando; pronto se separaran los dos cuerpos y el choque terminará.

Para encontrar las velocidades de los dos cuerpos despues del choque, observemos que el cuerpo M sufre una doble pérdida expresada por $2(V-v)$, y el cuerpo M' una doble ganancia expresada por $2(v-V')$; (v es la velocidad comun al fin de la compresion). Entónces, si U y U' representan las velocidades despues del choque, se tendrá:

$$U=V-2(V-v)=2v-V$$
$$U'=V'+2(v-V')=2v-V.$$

Poniendo en lugar de v su valor (1) obtenido ántes, resultará:

$$U=\frac{(M-M')V+2M'V'}{M+M'}$$

$$U'=\frac{(M'-M)V'+2MV}{M+M'} \quad (2)$$

Discutamos estas fórmulas.

Si $M=M'$, será:

$$U=\frac{2MV'}{2M}=V', \text{ y } U'=\frac{2MV}{2M}=V,$$

es decir: *que si los cuerpos son de igual masa se cambiaran mutuamente sus velocidades en el choque.*

Si ademas de ser iguales las masas, V' es negativa, lo que significa que el cuerpo M' se mueve en sentido contrario de M, será: $U'=-V'$ y $U=V$, esto es: *que ambos cuerpos retrocederan despues del choque, cambiándose sus velocidades.*

En la misma hipótesis de ser $M=M'$, si se hace $V'=0$, lo que indica que el cuerpo M' está en reposo, resultará: $U=0$ y $U'=V$, es decir: *que el cuerpo chocante quedará en reposo mientras que el chocado*

e moverá con la velocidad del primero. Por esto, si una bola *a* (Fig. 52) choca con la primera de varias bolas puestas unas al lado de otras, todas quedaran en reposo escepto la última *c* que será lanzada con una velocidad igual á la que la bola *a* ha impartido al sistema.

Si siendo M diferente de M', se supone V'=0, las fórmulas se convertiran en

$$U=\frac{(M-M')V}{M+M'}$$

$$U'=\frac{2MV}{M+M'}$$

En esta hipótesis, si $M>M'$, ambos valores seran positivos, es decir: *que los dos cuerpos se moveran en el sentido del mayor.* Y si $M<M'$, U será negativa y U' positiva, es decir: *que el cuerpo chocante retrocederá despues del choque.*

Por último: cuando $V'=0$ y $M'=\infty$, esto es, cuando el cuerpo M' sea un obstáculo infinitamente grande respecto de M, será $U=-V$ lo que indica: *que el cuerpo chocante retrocederá con la misma velocidad que tenia al verificarse el choque.*

59. Choque oblicuo.—Sea el caso de dos cuerpos elásticos M y M' (Fig. 53). Supongamos que el cuerpo M' está en reposo y que M se mueve segun la direccion de la flecha con una velocidad representada por MS. Esta velocidad puede descomponerse en dos: la una MF dirigida segun la línea de los centros y la otra MF' segun una perpendicular á esta línea. La primera pasa completamente á la bola M', que se moverá entónces segun la línea de los centros; y la segunda impulsará á la bola M en la direccion MF'. Estas velocidades se calculan por las fórmulas ya encontradas.

Sea ahora una esfera elástica A (Fig. 54) que choca oblicuamente, segun la direccion FA de la flecha, contra un plano fijo y resistente CB. La velocidad de la esfera al momento del choque se puede descomponer en dos: la una AB tangente ó paralela al plano CB, y la otra AN' normal á este plano. Esta última se cambia despues del choque en una velocidad AN igual y opuesta á AN', de suerte que la velocidad despues del choque será la resultante de las componentes AB y AN ó sea AE.

Si el cuerpo A careciese de elasticidad, la velocidad AN' ó AN seria completamente destruida por el plano, y el cuerpo se moveria sobre la superficie del plano segun la direccion AB.

60. Leyes del choque oblicuo.—El ángulo FAN (Fig. 54) formado por la direccion FA de la velocidad ántes del choque, con la normal AN al plano CB, se llama *ángulo de incidencia;* y el ángulo EAN, que hace la direccion AE de la velocidad despues del choque, con la misma normal, se llama *ángulo de reflexion.*

Entendido esto, el choque oblicuo de los cuerpos elásticos está sujeto á las dos leyes siguientes:

1.ª *El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexion.*

2.ª *El ángulo de incidencia y el ángulo de reflexion estan en un mismo plano perpendicular á la superficie reflejante.*

En efecto: siendo AN=AN', los paralelógramos NABE y N'ABF' son iguales, de donde resulta: que el ángulo EAN es igual al ángulo F'AN'; y como el ángulo F'AN' es igual á FAN por opuestos al vértice, se sigue: que el ángulo FAN es igual al ángulo EAN.

Tambien es evidente que los planos de los ángulos FAN y EAN forman un solo plano perpendicular al plano CB.

61. Observacion. — Las anteriores fórmulas del choque se han obtenido, suponiendo en los cuerpos sólidos una elasticidad perfecta: pero como está propiedad no la poseen en absoluto, resulta que dichas fórmulas se modifican en cada caso por la consideracion del coeficiente ó grado de elasticidad de los cuerpos.

Tambien sucede, que á causa de no ser perfectamente incompresible el plano CB, la experiencia da siempre el ángulo de incidencia un poco menor que el ángulo de reflexion, es decir, que la velocidad AN despues del choque es un poco menor que la velocidad AN'.

El problema del choque se complica cuando hay que atender, no solo al movimiento de traslacion de los cuerpos, sino tambien á su rotacion, cuando la direccion de la fuerza motriz no pasa por sus centros. El juego del billar presenta un ejemplo de esta complicacion, y por esto constituye una de las teorias mas difíciles.

CAPITULO IX.

TEORIA DE LAS MAQUINAS AL ESTADO DE EQUILIBRIO.

§ 1.° —Definiciones.

62. Definicion y division de las máquinas.—Se da

el nombre de *máquina* á todo instrumento ó aparato destinado á trasmitir la accion de una fuerza. Un cincel, una sierra, una bomba de incendio son máquinas. En toda máquina hay que considerar dos clases de fuerzas, á saber: *fuerzas motrices* ó *potencias*, destinadas á producir el efecto que se desea, como el vapor, el agua, la accion muscular; y *resistencias* ó fuerzas que es preciso vencer para obtener el efecto.

Las resistencias son de dos especies: *resistencias útiles* y *resistencias pasivas*. Las primeras estan constituidas por el obstáculo mismo que la máquina ha de vencer, por ejemplo el peso de un cuerpo que se debe levantar. Las segundas dependen del frote ó roce de las diferentes piezas de la máquina, de la rigidez de las cuerdas, resistencia del aire, &. Estas últimas resistencias perjudican al trabajo motor, de suerte que una máquina será tanto mas perfecta cuanto mas cuidado se haya puesto en evitar ó disminuir las resistencias pasivas al tiempo de construirla.

Las máquinas se dividen en *simples* y *compuestas*. Una máquina simple está constituida por una sola pieza sujeta á girar sobre un punto ó eje fijo, ó á producir el desliz sobre un plano. Las máquinas compuestas se forman de la combinacion de dos ó mas simples.

En toda máquina compuesta hay tres partes principales que considerar: 1º el *receptor* ó parte sobre la cual obran directamente las potencias: 2º el *operador* ó parte que produce en definitivo el efecto deseado: y 3º el conjunto de piezas intermedias al operador y el receptor, que sirve para *trasmitir el movimiento*.

Las máquinas simples, las únicas de que nos ocuparemos en estas nociones, se dividen comunmente en seis clases á saber: *palanca*, *polea*, *torno*, *plano inclinado*, *tornillo y cuña.* Pero como se verá en seguida, y segun la definicion dada anteriormente, todas estas máquinas simples se reducen á tres que son: la palanca, el torno y el plano inclinado.

§ 2.° —Palanca.

63. Definicion, diversos géneros de palanca.—La *palanca* es una barra ó pieza recta ó curva que puede moverse libremente al rededor de un punto fijo que se llama *punto de apoyo.*

Se distinguen tres géneros de palanca que son:

Palanca de primer género, cuando el punto de apoyo está entre la potencia y la resistencia (Fig. 55)

Palanca de segundo género, cuando la resistencia está entre la potencia y el punto de apoyo (Fig. 57)

Palanca de tercer género, cuando la potencia está entre la resistencia y el punto de apoyo (Fig. 57).

64. Ejemplos.—Las balanzas, la romana, son palancas de primer género. Las tijeras (Fig, 58) constituyen una doble palanca de primer género; cada una de sus ramas es una palanca cuyo punto de apoyo está en el tornillo A, la potencia en la mano P, y la resistencia en el objeto que se corta R.

Una hoja de puerta que gire sobre sus goznes tirada del llamador, es una palanca de segundo género. El quiebra nueces (Fig. 59), el cuchillo de boticarios que sirve para cortar raices (Fig. 60), los remos de una embarcacion son tambien palancas de

segundo género. Entre las palancas de tercer género citaremos el pedal de los pianos, las tenazas, pinzas, &.

El cuerpo humano ofrece muchos ejemplos de los tres géneros de palanca. Los huesos representan las palancas, los músculos las potencias y los puntos de apoyo estan en las articulaciones. Así, en el acto de inclinar la cabeza hácia atras (Fig. 61) juega una palanca de primer género. El apoyo A está en la articulacion de la cabeza con la columna vertebral, la potencia P se ejerce por los músculos de atras del cuello y la resistencia R es el peso de la parte anterior de la cabeza. La misma palanca resulta, inclinando la cabeza hácia adelante ó á los lados.

Cuando elevamos nuestro cuerpo sobre la punta de un pié (Fig. 62), juega una palanca de segundo género. El punto de apoyo A se encuentra en los artejos ó dedos del pié, la poteneia P se ejerce atras por los músculos de la pierna que van á atarse al calcañal y la resistencia R es el peso mismo de todo el cuerpo.

La Fig. 63, que representa el esfuerzo del antebrazo sosteniendo un peso, es una palanca de tercer género. El apoyo A está en la articulacion del codo, la potencia P se ejerce por los músculos de la parte anterior del brazo, y la resistencia R está en la mano.

65. Condiciones de equilibrio de una palanca.— Tomemos la palanca AB (Fig, 64). Para que en esta palanca haya equilibrio es preciso y basta que las fuerzas P y Q tengan un resultante que pase por el punto de apoyo I, cuya resistencia la destruya; pero esto exige que las fuerzas esten en un mismo plano con el punto de apoyo, que tiendan á hacer girar la

palanca en sentido contrario y que las intensidades de las fuerzas como en el caso de las fuerzas paralelas, esten en razon inversa de la longitud de los brazos de la palanca. (Se da el nombre de *brazos de palanca* á las distancias Im, In, que son las perpendiculares tiradas respectivamente desde el punto de apoyo á la direccion de cada una de las fuerzas P y Q).

Se tendrá, pues, P : Q : : In : Im; ó bien

$$P \times Im = Q \times In.$$

Y como en Mecánica se da el nombre de *momento de una fuerza* con relacion á un punto, al producto de esta fuerza por su distancia á este punto, resultará en definitivo: *que en toda palanca en equilibrio los momentos deben ser iguales.*

66. Usos de la palanca.—La palanca es una de las máquinas mas útiles y de mas potencia; por esto Arquímides decia: "que se me dé un punto de apoyo y yo moveré el mundo." La palanca entra como elemento principal en las máquinas compuestas. Sirve en general para levantar grandes pesos.

67. Cuestiones.—I. En una palanca de primer género, de 1 metro de longitud, la potencia es de 2 kilógramos y la resistencia de 8 kilógramos. ¿Qué longitud deberan tener respectivamente los brazos de la palanca en caso de equilibrio?

Resolucion.—Puesto que la potencia y la resistencia, en una palanca en equilibrio, deben estar en razon inversa de la longitud de los brazos (65); estando estas fuerzas en la relacion de 2 : 8 ó de 1 : 4, los brazos estaran en la de 4 : 1. Por consiguiente, siendo de 1 metro la longitud de la palanca, el brazo de la potencia deberá tener 80 centímetros y el de la resistencia 20 centímetros.

Este resultado se obtiene desde luego, estableciendo las proporciones siguientes:

$$2+8 \text{ ó } 10 : 2 :: 1 : \frac{2}{10}=20 \text{ centímetros.}$$

$$2+8 \text{ ó } 10 : 8 :: 1 : \frac{8}{10}=80 \text{ centímetros.}$$

II. Una palanca de segundo género tiene 2 metros de longitud. ¿A qué distancia del punto de apoyo deberá ponerse un peso de 12 kilógramos para ser equilibrado por una potencia de 9 kilógramos?

Resolucion.—Como en una palanca de segundo género el brazo de la potencia es toda la longitud de la palanca, llamando x á la distancia buscada, será:

$$9 : 12 :: x : 2, \text{ de donde}$$

$$12\,x=18, \text{ ó } x=\frac{18}{12}=1^{m},5$$

Así, el peso ó la resistencia deberá colocarse á la distancia de 1 metro y 5 decímetros, ó sea metro y medio.

III. En una palanca de tercer género una potencia de 20 gramos actúa sobre un brazo de 4 centímetros. ¿Qué peso seria necesario para establecer el equilibrio, actuando sobre un brazo de 20 centímetros?

Resolucion.—Designando por x el peso buscado, sentaremos la siguiente proporcion:

$$\overset{g}{20} : x :: \overset{c}{20} : 4, \text{ de donde}$$

$$20\,x=80 \text{ ó } x=4 \text{ gramos.}$$

IV. Dos cargadores sostienen sobre sus hombros los extremos de una barra de la que cuelga un peso de 120 kilógramos; la barra tiene 2 metros de longitud y el peso está suspendido á la distancia de 90

centímetros de uno de los extremos de la barra. ¿Cuánto lleva de peso cada uno?

Resolucion.—La barra en cuestion representa una palanca de segundo género y cada cargador es potencia y apoyo á la vez. Por consiguiente, en un caso, el brazo de la potencia es de 2 metros ó 200 centímetros y el de la resistencia de 90 centímetros; y en el otro el brazo de la potencia es de 200 centímetros y el de la resistencia de 110 centímetros.

Estableceremos, pues, las siguientes proporciones:

$x : 120 :: 110 : 200 = 66$ k. (peso que lleva el que queda á la distancia de 90 c.)

$x : 120 :: 90 : 200 = 54$ k. (peso del que está mas distante.)

68. Balanza.—La *balanza* es una palanca de primer género, que sirve para determinar el peso relativo de los cuerpos.

Una balanza se compone esencialmente de una pieza simétrica AB (Fig. 65) que se llama *fiel*, movible al rededor de un punto ó eje fijo. De las extremidades del fiel penden por medio de cadenillas dos platos de igual peso. En uno de ellos se pone el cuerpo que se quiere pesar y en el otro el contrapeso. El fiel debe ser muy movible, y al efecto está provisto por el medio de un cuchillo de acero templado en forma de prisma triangular, por cuya arista se apoya sobre dos planos de acero ó ágata fijos á una columna que sostiene todo el aparato. A la parte superior de esta columna hay un arco graduado cuyo cero corresponde al medio. Una aguja unida al fiel oscila con él delante de este arco, mientras se mueve la balanza.

69. Condiciones de una buena balanza.—Para que

una balanza sea exacta es necesario que permanezca en equilibrio horizontal cuando los platos estan vacíos ó cargados con pesos iguales. Este resultado se obtiene cuando se llenan las siguientes condiciones de *precision.*

1ª *Los brazos del fiel deben ser perfectamente iguales.* Esta condicion es clara, porque si los brazos fuesen iguales, seria preciso para obtener el equilibrio emplear pesos desigualas (65). Por lo demas, fácil es cerciorarse de si los brazos de una balanza son iguales. Basta para esto colocar un cuerpo en uno de los platos y establecer el equilibrio por medio de otro cuerpo en el otro plato. Si cambiando de plato los dos cuerpos, el equilibrio subsiste, es prueba de que los brazos de la balanza son iguales.

2ª *El centro de gravedad del fiel debe hallarse en la vertical que pasa por su punto de apoyo y un poco debajo de este punto.* Esta condicion es necesaria para que el equilibrio de la balanza sea estable. En efecto: si el centro de gravedad coincidiera con el punto de apoyo del fiel, la balanza seria *indiferente* (40. 3º). En este caso cualquiera que fuese la posicion dada al fiel, permaneceria en equilibrio siempre que los pesos fuesen iguales. Y si el centro de gravedad estuviera encima del punto de apoyo, el equilibrio seria inestable (40. 2.º) y la balanza *loca.* Pero si el centro de gravedad está debajo del punto de apoyo, ambos en la misma vertical, el fiel quedará en equilibrio estable (40. 1º). Entónces, el fiel permanecerá siempre horizontal, ya sea que los platos esten desocupados ó que esten cargados de pesos iguales; y en caso de que se desvie vuelve á tomar su posicion horizontal, despues de una serie de oscilaciones mas y mas pequeñas.

Ademas de las condiciones que acabamos de estudiar una buena balanza debe ser *sensible*, es decir, que con un ligero esceso de peso determinado que se ponga en uno de los platos el equilibrio se rompa. En el caso contrario la balanza seria *perezosa*.

La sensibilidad de una balanza depende no solo del cuidado que ponga el constructor en disminuir el roce de la arista del fiel, sinó tambien del peso y longitud del fiel y de la posicion del centro de gravedad.

Para determinar estas últimas condiciones sea AB (Fig. 66) el eje del fiel, r el punto de apoyo y g el centro de gravedad. Supongamos que, estando los platos cargados con pesos iguales P, se agrega á uno de ellos, un esceso de peso p. El fiel entónces se inclinará y tomará cierta posicion A'B' por ejemplo, foamando un ángulo que vamos á dererminar.

En la nueva posicion A'B' del fiel actúan sobre sus extremos las fuerzas P y $P+p$. Las dos fuerzas iguales P, se destruyen y solo quedan la fuerza p aplicada en B' y la q, peso del fiel, aplicada en g', nueva posicion del centro de gravedad del fiel, que de g se ha elevado á g' al verificarse la inclinacion. Estas dos fuerzas deben equilibrarse, porque el brazo de palanca ar va aumentando y el br disminuyendo con la inclinacion Hay, pues, una posicion inclinada A'B' en que necesariamente se tiene: $q \times ar = p \times br$. (1)

Pero llamando x al ángulo BrB', l á la semilongitud del fiel y n á la distancia gr; el triángulo BrB' dará: $br = B'r \cos.x$; y el triángulo arg', que es semejante al anterior dará: $ar = g'r$ sen.x. Y como $B'r = l$ y $g'r = gr = n$, tendremos: $br = l \cos.x$ y

$ar = n$ sen. x. Sustituyendo estos últimos valores en la ecuacion (1), esta se convertirá en

$$q \times n \text{ sen. } x = p \times l \cos. x; \text{ de donde}$$

$$\text{tang. } x = \frac{pl}{qn}.$$

Esta fórmula contiene las condiciones de sensibilidad de la balanza, bajo el punto de vista mecánico. En efecto: ella muestra que tang. x ó la inclinacion, aumenta en razon directa del esceso de peso p: que la sensibilidad será tanto mayor cuanto mayor sea l ó la la longitud del fiel y cuanto menor sea su peso q; y que esta sensibilidad será tambien tanto mayor cuanto menor sea n ó sea la distancia del centro de gravedad al punto de apoyo. Por consiguiente, las condiciones de sensibilidad de una balanza pueden formularse así:

1.ª *El fiel debe ser bastante largo y muy ligero.*

2.ª *El centro de gravedad del fiel debe estar bastante cerca del punto de apoyo.*

70. Métodos de pesar con exactitud.—Para obtener con exactitud el peso de un cuerpo, aun con una balanza *falsa*, se sigue el siguiente método conocido con el nombre de *la doble pesada de Borda.* El cuerpo cuyo peso se quiere determinar se pone en uno de los platos de la balanza y en el otro se pone arenilla ó limaduras metálicas hasta establecer el equilibrio. En seguida, dejando la arenilla en su lugar, se quita el cuerpo y se le sustituye por pesos conocidos, como gramos, centígramos, &, hasta obtener de nuevo el equilibrio. En este estado los gramos, centígramos, &, representaran el peso del cuerpo, porque producen el mismo efecto que el cuerpo en igualdad de circunstancias.

Tambien puede determinarse el peso de un cuer-

po con mucha exactitud por medio de un cálculo muy sencillo. En efecto: basta para obtener el peso, pesar el cuerpo en uno de los platos, despues en el otro, y luego tomar de los dos pesos así obtenidas una media proporcional.

Para demostrarlo, sea x el peso del cuerpo, y supongamos que cuando el cuerpo está suspendido por el brazo a (Fig. 67) se equilibra con un peso p; y cuando por el brazo b se equilibra con un peso p'. Entónces, como en las dos pesadas los momentos deben ser iguales, por haber equilibrio en ambas, se tendrá: $ax=bp$ y $bx=ap'$. Multiplicando miembro á miembro estas dos igualdades, y suprimiendo el factor comun ab, se obtendrá por último:

$$x^2=pp'; \text{ de donde } x=\sqrt{pp'}.$$

§ 3.° —Polea ó garrucha.

71. Definicion.—La polea es un disco circular de madera ó metal, que presenta en su contorno una ranura llamada *garganta*, y que puede girar libremente sobre un eje que lo atraviesa en su centro. Los extremos del eje estan fijos á dos piezas paralelas que se reunen por la otra extremidad; esta parte de la polea se llama *chapa*. Cuando la polea forma una sola pieza con el eje, los extremos de este giran en agujeros practicados en la chapa. Al rededor de la garganta se pasa una cuerda á cuyos extremos se aplican las fuerzas. La polea puede ser fija ó movible.

La polea es *fija*, cuando la chapa está fija á un punto (Fig. 68); y es *movible* cuando la chapa está

provista de un gancho al cual se suspende el peso (Fig. 69); uno de los extremos de la cuerda está fijo entónces á un punto, y al otro se aplica la potencia.

72. Condiciones de equlibrio de la polea. — En una polea fija la condicion de equilibrio es: *que la potencia sea igual á la resistencia.*

En efecto: sometida la polea á la accion de las dos fuerzas P y R (Fig. 68) que tienden á hacerla girar sobre el punto C en sentido contrario, y obrando estas fuerzas tangencialmente sobre los puntos A y B respectivamente, representa esta polea una palanca de primer género; por consiguiente, habrá equilibrio cuando los momentos sean iguales, es decir, cuando $P \times AC = R \times BC$; pero $AC = BC$, por radios de un mismo círculo, luego $P = R$.

La condicion de equilibrio de la polea movible, cuando las direcciones de las cuerdas son paralelas, es: *que la potencia sea igual á la mitad de la resistencia.*

Sea la polea movible de la Fig. 69. La potencia P tiende á hacer girar la polea al rededor del punto B, y la resistencia R en sentido contrario; por consiguiente, en caso de equilibrio, los momentos con respecto al punto B, deberan ser iguales, esto es, $P \times AB = R \times BC$; pero AB como diámetro es doble del radio BC, luego el factor P es doble de R, esto es,

$$P = \frac{R}{2}.$$

Cuando las direcciones de las cuerdas no son paralelas, el equilibrio no puede establecerse sinó bajo la condicion de ser

$$P > \frac{R}{3},$$

esto es: *que la potencia debe ser mayor que la mitad de la resistencia.*

En efecto: suponiendo que la vertical AB (Fig. 70) represente el peso de la resistencia R, tírense por el punto A las rectas AD, AC, respectivamente paralelas á BP y BF; la fuerza AB puede considerarse como la resultante de las dos fuerzas BD y BC, que representan las tensiones de las partes de la cuerda BF y BP, y que cada una representa el valor de la potencia P. Pero es evidente que AB es menor que dos veces BD, y como el ángulo PBF crece, la potencia debe crecer en comparacion con el peso ó resistencia. Cuando PBF sea una línea recta, la potencia será infinitamente mayor que la resistencia.

73. **Polipastos.**—Se da el nombre de *polipasto* á un sistema de poleas fijas y movibles que se pueden combinar de varios modos.

1.º La Fig. 71 representa un polipasto. En este sistema la resistencia R se reparte igualmente entre todos los cordones (el número de cordones es doble del de poleas movibles). Por ejemplo: si el peso R fuese de 60 kilógramos, cada uno de los seis cordones soportaria un peso de 10 kilógramos, que es la sesta parte de 60; de suerte que bastarian los 10 kilógramos aplicados en P para obtener el equilibrio. Así, si n representa el número de poleas movibles $2n$ será el número de cordones, y por consiguiente se tendrá

$$P = \frac{R}{2n}.$$

Luego para establecer el equilibrio en un sistema

de poleas fijas y movibles de cordones paralelos es preciso: *que la potencia sea igual á la resistencia dividida por el duplo del número de poleas movibles.*

2.° Sea ahora el sistema de la Fig. 72, compuesto de una polea fija *a*, y de otras movibles. Como la polea movible *b* está sostenida solamente por el cordon *f*, la potencia P será la mitad del peso sostenido por dicha polea *b*. Por la misma razon el peso sostenido por la polea *b* es la mitad del sostenido por la polea *c*; el sostenido por la polea *c* es la mitad del sostenido por la polea *d*, y así sucesivamente si hubiese mayor número de poleas movibles. Por ejemplo: si la polea *d* soporta un peso de 16 kilógramos, la polea *c* sostendrá 8, la polea *b*, 4, y la potencia 2 kilógramos. Representando, pues, por *n* el número de poleas movibles se tendrá

$$P=\frac{R}{2^n}$$

es decir: *que para el equilibrio de un sistema de poleas movibles de cordones paralelos, la potencia debe ser igual á la resistencia dividida por la cifra* 2 *elevada al grado expresado por el número de poleas movibles.*

74. Usos de la polea.—La polea se emplea muy especialmente en el aparejo de los buques, y sirve para levantar grandes pesos á alturas considerables.

75. Cuestiones.—I. En un polipasto compuesto de tres poleas fijas y de tres movibles, como el de la Fig. 71, ¿qué fuerza se necesita para sostener un peso de 360 kilógramos?

Resolucion.— En este sistema la condicion de equilibrio es, que la potencia sea igual á la resistencia dividida por el duplo del número de poleas mo-

vibles (73. 1º) Por consiguiente; tendremos:

$$P=\frac{360}{2\times 3}=60 \text{ kilógramos.}$$

II. ¿Qué peso podrá sostenerse con una potencia de 65 kilógramos en un sistema de poleas, como el de la Fig. 71' donde haya cuatro fijas y cuatro movibles?

Resolucion. R=56×2×4=440 kilógramos.

III. Un polipasto como el de la Fig. 72, consta de una polea fija y de cuatro movibles. ¿Qué fuerza se necesita para equilibrar un peso de 320 kilógramos?

Resolucion.—Como en este caso la potencia debe ser igual á la resistencia dividida por la cifra 2 elevada al grado expresado por el número de poleas movibles (73. 2º), será:

$$P=\frac{320}{2^4}=\frac{320}{16}=20 \text{ kilógramos.}$$

§ 4.° —Torno.

76. Definicion.—El torno es una máquina formada de una rueda atravesada en su centro por un eje cilíndrico al cual está unida; este eje descansa y gira por sus extremidades sobre dos apoyos. La potencia P (Fig. 73) se aplica á la circunferencia de la rueda por medio de una cuerda que obra tangencialmente, ó por medio de atravesaños ó palancas; y la resistencia R actúa por medio de otra cuerda que se arrolla al rededor del eje.

La rueda puede sustituirse por un manubrio unido á un extremo del eje (Fig. 74) ó por palancas.

Un torno toma el nombre de *cabria* cuando el eje es horizontal, y el de *cabrestante* cuando es vertical (Fig 75).

77. **Condicion de equilibrio del torno.**—La condicion de equilibrio del torno es: *que la potencia sea á la resistencia como el radio del eje cilíndrico es al radio de la rueda ó círculo que tiende á describir la potencia.* En efecto: un torno actúa como una palanca de primer género; el punto de apoyo está en C (Fig. 76) centro del eje, y los radios AC y BC de la rueda y del eje, que respectivamente representaremos por r y r', son los brazos de la palanca. La potencia P tiende á hacer girar el eje en un sentido, y la resistencia R en sentido contrario; luego para que haya equilibrio es preciso que los momentos sean iguales, esto es:

$$P\times r = R\times r'; \text{ de donde } P : R :: r' : r.$$

78. **Ruedas dentadas y su condicion de equilibrio.**—Las *ruedas dentadas* no son otra cosa que una aplicacion del torno. La circunferencia de estas ruedas y su eje mismo, que se llama *piñon*, estan provistos de dientes que engranan con los de otras ruedas.

En el sistema de ruedas dentadas de la Fig. 77, la potencia P está aplicada sobre la circunferencia de la primera rueda A por medio de un cordon: los dientes del piñon de esta primera rueda actúan sobre los dientes de la circunferencia de la segunda rueda B y la hacen girar de izquierda á derecha: esta rueda B actúa por los dientes de su piñon sobre los dientes de la circunferencia de la tercera rueda C y la hace girar de derecha á izquierda; finalmente al rededor del eje de esta última rueda se arrolla el cordon que lleva la resistencia Q.

La condicion de equilibrio de un sistema de ruedas dentadas es: *que la potencia sea á la resistencia, como el producto de todos los radios de los ejes ó piñones es al producto de todos los radios de las ruedas.* En efecto, las ruedas dentadas A, B, C, (Fig. 77), actúan unas sobre otras como una serie de palancas, ó mas bien forman una palanca compuesta; los radios *vo*, *oi*, son los brazos de palanca de la primera rueda; *v'o'*, *o'i'* los de la segunda; y *v''o''*, *o''i''* los de la tercera; pero en caso de equilibrio, los momentos deben ser iguales, luego:

$P \times vo = B \times oi$ (B ó la segunda rueda representa la resistencia);

$B \times v'o' = C \times o'i'$ (Aquí B hace de potencia y C de resistencia);

$C \times v''o'' = Q \times o''i''$ (C ó la tercera rueda actúa por último);

Multiplicando miembro á miembro estas tres igualdades, llamando R, R', R'' á los radios *vo*, *v'o'*, *v''o''* de las ruedas y *r*, *r'*, *r''* á los radios *oi*, *o'i'*, *o''i''* de los piñones, y suprimiendo el factor comun $B \times C$, se tendrá:

$$P \times R \times R' \times R'' = B \times r \times r' \times r'', \text{ de donde}$$

$$P : Q :: r \times r' \times r'' : R \times R' \times R''.$$

79. **Usos del torno.**—El torno es de un uso muy comun. Sirve para levantar pesos; en los puertos se emplea mucho el cabrestante para ejercer esfuerzos horizontales, como en el caso de atracar los buques. Las ruedas dentadas hacen parte de la maquinaria de los relojes y de otras muchísimas máquinas.

80. **Cuestiones.**—I. En un torno el radio de la rueda es de 2 metros (ó 20 decímetros) y el del eje de 1 decímetro, ¿qué potencia será necesario aplicar

á la rueda para sostener un peso de 900 kilógramos?

Resolucion.—Siendo la condicion de equilibrio del torno (77), que la potencia sea á la resistencia, como el radio (ó diámetro) del eje es al radio (ó diámetro) de la rueda, llamando x á la potencia, formaremos la siguiente proporcion:

$x : 900 : : 1 : 20$, de donde:

$$x = \frac{900}{20} = 45 \text{ kilógramos.}$$

II. En un torno el diámetro de la rueda es de 3 metros y el del eje de 4 decímetros, ¿qué peso podrá sostener una potencia de 200 kilógramos?

Resolucion. $200 : x : : \overset{d}{4} : \overset{d}{40}$, de donde:

$$x = \frac{200 \times 40}{4} = 2000 \text{ kilógramos.}$$

III. El diámetro de la rueda de un torno es de 4 metros, siendo la potencia de 200 kilógramos y la resistencia de 2,000 kilógramos, ¿cuál es la longitud del diámetro del eje?

Resolucion. $200 : 2000 : : x : 40$, de donde:

$$x = \frac{200 \times 40}{2000} = 4 \text{ decímetros.}$$

IV. En un sistema de tres ruedas dentadas como el de la Fig. 77, los diámetros de las ruedas son cuatro veces mayores que los de los piñones, ¿una potencia de 2 kilógramos qué peso podrá sostener?

Resolucion. $2 : x : : 1^3 : 4^3$, ó $2 : x : : 1 : 64$, de donde: $x = 2 \times 64 = 128$ kilógramos.

§ 5.° —Plano inclinado.

81. **Definicion.**—Se llama *plano inclinado* toda

superficie plana que forma con el horizonte un ángulo menor que un recto. Á este ángulo se le da el nombre de *ángulo de inclinacion del plano.*

Ya hemos dicho (45) que en un plano inclinado se distinguen tres cosas: su *longitud*, su *altura* y su *base.* Longitud del plano inclinado es la distancia que hay desde su parte mas baja hasta la mas elevada; altura del plano es la perpendicular bajada desde la parte mas alta de su longitud hasta la horizontal; y base es la parte de la horizontal comprendida entre el pié de la altura y la parte mas baja de la longitud del plano. En el plano inclinado de la Fig. 78, AC es la longitud, AB la altura y BC la base del plano.

82. Condiciones de equilibrio del plano inclinado.— 1.° La condicion de equilibrio de un plano inclinado, cuando la potencia actúa paralelamente al plano, es: *que la potencia sea á la resistencia como la altura del plano es á su longitud.* Para demostrarlo, supongamos que se trata de mantener en equilibrio, por medio de una fuerza P, el cuerpo M que se halla sobre el plano inclinado AC (Fig. 78). Sea R la accion de la gravedad ó el peso del cuerpo; este peso se puede descomponer en dos fuerzas, una F paralela al plano y la otra S perpendicular al mismo plano; pero esta última fuerza es nula en su efecto á causa de la resistencia del plano. Queda, pues, solamente la fuerza F que produce el descenso del cuerpo sobre el plano; pero de la comparacion de los lados homólogos de los triángulos semejantes ABC y FGR resulta:

$$\frac{FG}{GR}=\frac{F}{R}=\frac{AB}{BC};$$

y como para mantener el cuerpo en equilibrio es

necesario que la fuerza P sea igual y directamente opuesta á F, resultará por último, P : R : : AB : AC.

2.° Cuando la potencia actúa paralelamente á la base del plano, *la potencia es á la resistencia como la altura del plano es á su base.*

En efecto: haciendo una construccion análoga á la anterior, y comparando los triángulos semejantes ABC y RGF (Fig. 79), se obtendrá:

$$\frac{F}{R}=\frac{AB}{BC}, \text{ ó bien } P : R : : AB : BC.$$

83. **Usos del plano inclinado.** Se ve que por medio del plano inclinado se pueden levantar grandes pesos con poca fuerza. Se creé que ha sido conocido y usado por los antiguos, y que las grandes piedras empleadas en la construccion de las pirámides de Egipto fueron levantadas por medio de esta potencia mecánica.

Los caminos que no estan perfectamente horizontales son planos inclinados. Generalmente se da de inclinacion á un camino un 4 por ciento, es decir, que para una distancia de 100 metros, la diferencia de nivel debe ser de 4 metros, ó de 1 por 25. Dando á un camino de hierro 1 por ciento de inclinacion, una potencia como 1 podrá sostener una carga como 100, tal es la ventaja del plano inclinado.

Se sabe por experiencia, que un camino cuyo ángulo de inclinacion sea de 10 grados, es de difícil ascenso para los carros: que una acémila no puede subir por un camino de mas de 29 grados de inclinacion, y que una cabra no puede ascender por una pendiente de mas de 50 grados. El límite de inclinacion para la estabilidad de los animales es de 65 grados.

84. **Cuestiones.**—1. Un plano inclinado tiene 10

metros de longitud sobre 3 metros de altura, ¿qué potencia se necesita para sostener un peso de 400 kilógramos, paralelamente al plano.

Resolucion.—En este caso la condicion de equilibrio es, que la potencia sea á la resistencia como la altura del plano es á su longitud (82. 1.°). Por consiguiente llamando x á la potencia, será: $x : 400 :: 3 : 10$,

de donde: $x = \frac{400 \times 3}{10} = 120$ kilógramos.

II. Un plano inclinado tiene 7 metros de longitud y 5 de altura, ¿qué peso podrá sostenerse sobre este plano con una potencia de 5700 kilógramos, obrando dicha potencia paralelamente al plano?

Resolucion. $5700 : x :: 5 : 7$, de donde:

$$x = \frac{5700 \times 7}{5} = 7980 \text{ kilógramos.}$$

III. ¿Qué potencia se necesita para sostener sobre un plano inclinado de 8 metros de base y de 2 de altura, un peso de 2000 kilógramos, suponiendo que la potencia obra paralelamente á la base del plano?

Resolucion.—En este caso la condicion de equilibrio es, que la potencia sea á la resistencia como la altura del plano es á su base (82. 2.°) Por consiguiente, designando por x la potencia, será: $x : 2000 :: 2 : 8$,

de donde: $x = \frac{2000 \times 2}{8} = 500$ kilógramos.

IV. Un plano inclinado tiene 5 metros de longitud y 3 de altura, ¿qué potencia, obrando ésta paralelamente á la base, debe emplearse para equilibrar un peso de 600 kilógramos?

Resolucion.—Para resolver esta cuestion es preciso determinar previamente la base del plano; para esto, se sabe: que un lado cualquiera de un triángulo rectángulo, es igual á la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del otro lado. Designando pues por b la base obtendremos:

$$b=\sqrt{5^2-3^3}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$$

Ahora, llamando x á la potencia, resolveremos el problema por medio de la siguiente proporcion:

$x : 600 : 3 : 4$, de donde: $x=\frac{600\times3}{4}=450$ kilógramos.

§ 6.° —Tornillo ó rosca.

85. **Definicion.**—El *tornillo* (Fig. 80), es un cilindro al rededor del cual está arrollado un prisma triangular ó cuadrangular, siguiendo las vueltas de una hélice. Este prisma se llama *filete del tornillo.* La distancia *ab*, entre dos vueltas contiguas del filete, se llama *paso* del tornillo.

Se da el nombre de tuerca á una pieza hueca de tal manera configurada que á ella se ajusta perfectamente el tornillo.

Un tornillo no es otra cosa que un plano inclinado, ó mejor dicho: cada *espira* ó vuelta completa del filete es un plano inclinado, cuya altura es el paso del tornillo y su base la circunferencia de la base del cilindro. Esto se ve fácilmente, desarrollando el tornillo ó cilindro ABCD (Fig. 81) sobre un rectángulo AB*rx*; las trazas *mr*, *ns*, *ot*, A*v*, forman otros

tantos planos inclinados, cuyas alturas *rs*, *st*, *tv*, *vx*, son los pasos del tornillo, y cuyas bases *ms*, *nt*, *ov*, A*x*, son iguales á la circunferencia de la base del cilindro.

86. Condiciones de equilibrio del tornillo.—La condicion de equilibrio del tornillo es: *que la potencia sea á la resistencia como el paso del tornillo es á la circunferencia que tiende á describir la potencia.*

En efecto: girando el tornillo la potencia se ejerce en una direccion paralela á la base, y como cada espira es un plano inclinado, habrá equilibrio cuando la potencia sea á la resistencia como la altura del plano (ó el paso del tornillo) es á su base (ó la circunferencia del cilindro) (82. 2.°); pero como generalmente se combina una palanca con el tornillo, el efecto de la potencia crece en razon del radio del cilindro á la longitud de la palanca, ó en razon de la circunferencia del cilindro á la circunferencia descrita por el extremo de la palanca. Luego en caso de equilibrio, llamando P á la potencia, Q á la resistencia, *a* al paso del tornillo y R al radio del círculo que describe la potencia, sera:

$$P : Q :: a : 2\pi R.$$

87. Tornillo sin fin.— Cuando el filete de un tornillo actúa sobre un torno de rueda dentada, se forma un *tornillo sin fin*, máquina de mucho efecto. la Fig, 82 representa esta combinacion; la potencia se aplica en P y la resistencia en Q por medio de una cuerda que se arrolla al rededor del eje de la rueda.

Para determinar la condicion de equilibrio de esta máquina, designemos por V la resistencia que uno de los dientes de la rueda opone al filete del tornillo, por *r* el radio del cilindro del torno y por

R' el de la rueda dentada, Entónces se tendrá: P : V : : a : 2ñR (86); y V : Q : : r : R' (77); de donde, multiplicando estas dos proporciones, resulta: P : Q : : ar : 2ñRR', es decir: *que la potencia es á la resistencia, como el radio del cilindro del torno multiplicado por el paso del tornillo, es al radio de la rueda dentada multiplicado por la circunferencia que tiende á describir la potencia.*

88. **Usos del tornillo.**—El tornillo sirve para levantar ó sostener grandes pesos y ejercer fuertes presiones. El *tornillo micrométrico* y la *máquina de dividir*, son aplicaciones del tornillo. Por medio de estas máquinas se dividen en partes iguales las extensiones pequeñas, líneas rectas y arcos de círculo. El tornillo sin fin se emplea frecuentemente en los instrumentos de música para tender las cuerdas ó membranas.

89. **Cuestiones.**—I. ¿Qué potencia deberá aplicarse á la palanca de que está provisto un tornillo, para sostener por su medio un peso de 300000 kilógramos?; el brazo de la palanca tiene 2 metros y el paso del tornillo es igual $0^m,05$.

Resolucion.—La potencia debe ser á la resistencia como el paso del tornillo á la circunferencia descrita por la palanca ó por un radio de 2 metros. Por consiguiente, será:

$$x : 300000 : : 0{,}05 : 2 \times 3{,}1416 \times 2, \text{ de donde:}$$

$$x = \frac{300000 \times 0{,}05}{2 \times 3{,}1416 \times 2} = 1193{,}65 \text{ kilógramos.}$$

II. Con una potencia de 300 kilógramos aplicada á una palanca de 1 metro en un tornillo cuyo paso es de $0^m,04$, ¿qué peso podrá sostenerse?

Resolucion. $300 : x : : 0{,}04 : 2 \times 3{,}1416 \times 1$, de donde:

$$x=\frac{1884,96}{0,04}=47124 \text{ kilógramos.}$$

III. En un tornillo sin fin la palanca del tornillo es de $0,^{m}50$, el paso del tornillo de $0^{m},01$, el radio de la rueda dentada de $0^{m},42$, el del cilindro de la rueda ó del torno de $0^{m},09$. ¿Qué potencia debe aplicarse á la palanca para sostener un peso de 2000 kilógramos?

Resolucion.

$$x : 2000 : : 0^{m},09 \times 0,01 : 0,42 \times 2 \times 3,1416 \times 0,50,$$

de donde: $x=\frac{2000 \times 0^{m},09 \times 0,01}{0,42 \times 2 \times 3,1416 \times 0,50}=1^{k},36$ kilóg.

§ 7.° —Cuña.

90. Definicion.—La *cuña* es una potencia mecánica que se reduce al plano inclinado. Consiste en un prisma triangular, comunmente de madera ó de hierro; que se introduce por su arista lateral mas delgada entre dos obstáculos que se trata de separar. Las caras ABCD, CFED (Fig. 83), que forman la arista ó corte DC del prisma, se llaman *lados de la cuña;* el plano ABFE donde se aplica la potencia, es la *cabeza de la cuña;* el ángulo ADE, es el ángulo de la cuña.

91. Condicion de equilibrio de la cuña.—La condicion de equilibrio de la cuña es: *que la potencia sea á la resistencia como la cabeza de la cuña es á la suma de sus dos lados.*

En efecto: sea P la potencia aplicada perpendicularmente sobre la cabeza AB de la cuña ABC (Fig. 84). Esta fuerza se puede descomponer en dos,

DE y DF, perpendiculares respectivamente á los lados AC y BC de la cuña; fuerzas que, en caso de equilibrio, deben ser iguales y directamente opuestas á las resistencias que presentan las partes que se trata de separar. Representando, pues, por DG la potencia P, las componentes DE y DF seran las resistencias que designaremos por Q y Q.' Acabando ahora el paralelógramo, los triángulos ABC, DEG, que son semejantes, daran la proporcion:

DG : AB : : DE : AC : : EG=DF : BC; ó bien:
DG : AB : : DE+DF :AC+BC; luego
P : AB : : Q+Q' : AC+BC; de donde:
P : Q+Q' : : AB : AC+BC.

92. Otra disposicion de la cuña.—Tambien se da á la cuña, para levantar pesos, la disposicion siguiente. Un sólido en forma de un simple plano inclinado (Fig. 85) se desliza y se hace avanzar en el sentido de la flecha P sobre un plano horizontal fijo BC; y una columna que se mueve entre guias, se apoya al mismo tiempo sobre el plano AB. Si la cuña se avanza en el sentido de la flecha horizontal P, la columna tiene que ascender en el sentido de la flecha vertical E; de modo que si la cuña avanza todo el camino CB, la columna se levanta a la altura AC. La condicion de equilibrio es, por lo demas, la del plano inclinado.

93 Usos de la cuña.—La cuña puede servir para levantar grandes pesos; pero mas comunmente se la emplea para dividir o hender los cuerpos, como piedras, trozos de madera, &. Al efecto, se practica previamente en el cuerpo una hendedura, y en esta se introduce la cuña por su corte, haciéndola avanzar ya sea á golpes ó por presion.

Por lo demas, una vez introducida una cuña, no

se sale de su lugar, porque el roce de sus lados sobre las partes del cuerpo donde está introducida se lo impide.

Los instrumentos cortantes, como los cuchillos, formones, cinceles, hachas, &, no son mas que cuñas. Los instrumentos punzantes, como las agujas, alfileres, clavos, &, son tambien cuñas de infinito número de lados.

El ángulo de una cuña depende del objeto á que se la destina. El de las herramientas para madera ó de carpinteria, no pasa de 30 grados; para el hierro el ángulo debe ser de 50 á 60 grados; y para el bronce entre 80 y 90.

94. Cuestiones.—I. La cabeza de una cuña tiene $0^{m},09$, y cada uno de sus lados $0^{m},70$, ¿qué fuerza producirá bajo una presion de 200 kilógramos?

Resolucion.—La potencia debe ser á la resistencia como la cabeza de la cuña á la suma de sus lados. Por consiguiente, será:

$$200 : x :: 0,09 : 2 \times 0,70, \text{ de donde:}$$

$$x = \frac{200 \times 2 \times 0,70}{0,09} = 3111,1 \text{ kilógramos.}$$

II. En una cuña cuya cabeza es de $0^{m},12$ y los lados de $0^{m},90$, ¿qué potencia deberá aplicársele para que ejerza una fuerza de 5000 kilógramos?

Resolucion. $x : 5000 :: 0,12 : 2 \times 0,90$, de donde:

$$x = \frac{5000 \times 0,12}{2 \times 0,90} = 333,3 \text{ kilógramos.}$$

CAPITULO X.

MÁQUINAS AL ESTADO DE MOVIMIENTO UNIFORME.

Se tendria una idea incompleta de las máquinas, y tal vez errónea, si solamente se las considerase al estado de equilibrio resultante de las fuerzas que sobre ellas actúan. Es tambien preciso considerarlas bajo el punto de vista dinámico ó de movimiento uniforme, y por esto vamos á establecer algunos principios de suma utilidad en Mecánica práctica.

95. Trabajo de una fuerza.—Cuando una fuerza constante obra sobre un punto, el efecto producido depende, no solo de la intensidad de la fuerza, sinó tambien del camino que tiende á recorrer su punto de aplicacion; de tal manera que si una fuerza no desvía este punto se puede decir que su efecto es nulo. Si un hombre por ejemplo, sostiene durante cierto tiempo un peso, sin desviarlo, su trabajo es inútil porque el suelo podria tambien sostener dicho peso; pero si el peso es levantado á cierta altura, el efecto se producirá proporcionalmente al peso y al camino ó altura á que se levante. Así, si se designa por P el peso de un cuerpo y por A la altura ó el camino que recorre, el efecto de la fuerza se medirá por el producto $P \times A$. Este producto ha sido designado por el Sr. Poncelet con el nombre de *trabajo*. Así, *el trabajo de una fuerza es el producto de su intensidad por el camino que recorre su punto de aplicacion en la direccion de esta fuerza.*

Si la fuerza no es constante sinó variable, será

preciso para formarse la nocion del trabajo considerar un elemento de camino infinitamente pequeño, recorrido por el punto de aplicacion en un tiempo tambien infinitamente pequeño; y entónces el trabajo toma el nombre de *trabajo elemental.* Si F (Fig. 86) representa la fuerza aplicada en *d*, *ds* el elemento de camino, y (F, *ds*) el ángulo que forma la direccion de la fuerza con la direccion del camino recorrido por el punto de aplicacion, el trabajo elemental de la fuerza F tendrá por expresion F. *ds*. cos. (F, *ds*) es decir: *que el trabajo elemental de una fuerza, es el producto de esta fuerza, por el elemento de camino que recorre su punto de aplicacion, y por el coseno del ángulo que la direccion de la fuerza hace con la direccion del camino.* Pero siendo *ds* igual al radio$=1$, y cos. (F, *ds*) igual á *dn* ó la proyeccion del camino elemental *ds* sobre la direccion de la fuerza F, se puede decir tambien, *que el trabajo elemental de una fuerza es el producto de esta fuerza por la proyeccion del elemento de camino sobre la direccion de la fuerza.*

Conocido el trabajo elemental, el *trabajo total será la suma algebraica de los trabajos elementales al fin de un tiempo dado.* Este trabajo tiene por expresion:

$$\int_{0}^{s} F.\ ds.\ \cos.\ (F,\ ds).$$

El trabajo total de una fuerza se designa por la característica T. Así, TF significa *trabajo total de la fuerza* F. El trabajo elemental se designa por *d*T. Así, *d*TF, quiere decir, *trabajo elemental de la fuerza* F.

El trabajo se divide en *motor* y *resistente.* Trabajo motor es el desarrollado por una fuerza motriz ó

potencia; y trabajo resistente es el desarrollado por una fuerza resistente.

El trabajo resistente se divide en *resistente útil* ó del operador, y *resistente pasivo*, dependiente del frote y demas resistencias pasivas.

El trabajo resistente útil se hallará, pues, restando del resistente total el resistente pasivo; y como en toda máquina al estado dinámico donde dos fuerzas se equilibran, el trabajo motor es por necesidad igual al trabajo resistente total, se sigue: *que el trabajo útil ó rendimiento de una máquina, será la diferencia entre el trabajo motor y el resistente útil ó del operador*. Se ve por esto, cuan erróneo es pensar que las máquinas aumentan el valor de las potencias ó fuerzas motrices, pues al contrario las disminuyen. Tambien se ve que el *movimiento perpetuo* que han buscado algunos físicos es imposible, pues seria preciso para obtenerlo que no hubiese resistencias.

El trabajo elemental puede ser nulo:

1.° *Cuando la fuerza es nula.*—Cuando un carruaje, por ejemplo, desciende en una pendiente por efecto de la inercia, el caballo que lo tira no ejerce ningun esfuerzo, no hay entónces trabajo.

2.° *Cuando el elemento de camino es nulo.*—Si el carruaje no pudiese ser movido por el caballo, por su mucho peso ó por otra causa, el trabajo será nulo por grande que sea el esfuerzo del animal.

3.° *Cuando el ángulo* (F, *ds*) sea recto, pues entónces cos. (F, *ds*) se hace igual á cero, y no hay camino en el sentido de la fuerza F. Por ejemplo: si cuando camina una locomotora por rieles rectilíneos actúa sobre ella cierta fuerza lateral perpendicular

á la direccion de los rieles, el trabajo de esta fuerza será nulo.

96. Unidad de trabajo.—Se ha tomado por *unidad de trabajo* el necesario para levantar el peso de un kilógramo á un metro de altura, ó el producto de un kilógramo por un metro. Este producto que se expresa por *km.* se llama *kilográmetro.* Así cuando se quiere hallar el trabajo de una fuerza, se la representa por tal número de kilógramos y este número se multiplica por el número de metros que recorre su punto de aplicacion, con lo que se obtiene el trabajo en kilográmetros. Por ejemplo: si un caballo tira un carruaje con un esfuerzo medio de 70 kilógramos, y ha hecho un camino de 500 metros, su trabajo será de $70 \times 500 = 35000$ kilográmetros.

Cuando se trata del trabajo continuo de las grandes máquinas se hace uso de otra unidad de trabajo, en que el tiempo entra como elemento indispensable. Esta unidad es un trabajo de 75 kilográmetros por segundo y se designa con el nombre de *caballo de vapor.*

El trabajo continuo de una máquina de vapor no puede reemplazarse por el de los caballos vivos. Si por ejemplo se dice, que una máquina de vapor es de la fuerza de 10 caballos, esto no significa que esa fuerza pueda reemplazarse por el trabajo de 10 caballos efectivos, pues se calcula que el trabajo continuo de un caballo de vapor representa el trabajo de 5,5 caballos efectivos. Por consiguiente, se necesitan 55 caballos efectivos para ejecutar de una manera continua el mismo trabajo que una máquina de la fuerza de 10 caballos de vapor.

97. Principio de las velocidades virtuales.—Para comprender este principio, consideremos una máqui-

ña simple cualquiera. Sea la palanca de la Fig. 87; supongamos que las dos fuerzas P y Q, que obran perpendicularmente á los brazos de la palanca, se equilibran, de suerte que se tenga:

$$P \times AC = Q \times AB.$$

Si esta palanca gira con movimiento uniforme al rededor del punto A, en un tiempo muy corto, los puntos de aplicacion C y B describirán dos arcos de círculo C*o* y B*r* sumamente pequeños y proporcionales á sus radios respectivos AC y AB, pues estos arcos corresponden á los ángulos CA*o* y BA*r* iguales entre sí. Sustituyendo, pues, estos arcos en la ecuacion anterior se tendrá: $P \times Co = Q \times Br$; lo que traducido al lenguaje comun significa: *que cuando dos fuerzas se hacen equilibrio en una misma máquina, si este equilibrio llega á romperse por un tiempo muy corto, la potencia multiplicada por el camino de su punto de aplicacion, en un corto tiempo, es igual á la resistencia multiplicada por el camino de su punto de aplicacion en el mismo tiempo, estimando estos caminos segun las direcciones de las dos fuerzas.*

Tal es el principio de las velocidades virtuales, principio generalizado por Lagrange. Se llama así, por que las velocidades de los puntos de aplicacion, representados aquí por los arcos G*o*, B*r*, son puramente posibles ó hipotéticos y no efectivos.

El principio de las velocidades virtuales se enuncia tambien, como lo enunció Descartes, así: *lo que se gana en fuerza se pierde en velocidad* y recíprocamente: *lo que se gana en velocidad se pierde en fuerza.*

FIN.

INDICE.

DEDICATORIA..

INTRODUCCION.

§ 1.° —NOCIONES PRELIMINARES.

Página

Materia...V
Cuerpo, masa...VI
Estados de los cuerpos.............................id
Division química de los cuerpos....................VII
Fenómenos..VIII
Leyes físicas, teoría física.......................IX

§ 2.° —PROPIEDADES GENERALES DE LOS CUERPOS.

Propiedades de los cuerpos.........................X
Extension..id
Impenetrabilidad...................................XII
Indestructibilidad.................................XIII

Página
Divisibilidad XIV
Compresibilidad XV
Dilatabilidad XVIII
Porosidad XIX
Elasticidad XXI
Movilidad XXII
Inercia XXIII

PRINCIPIOS GENERALES DE MECÁNICA.

CAPITULO I.

Nociones sobre los movimientos y las fuerzas.

§ 1.°—MOVIMIENTOS.

Diversas especies de movimiento 1
Velocidad 2

§ 2.°—FUERZAS.

Definicion y division de las fuerzas 3
Medida de las fuerzas .... id
Punto de aplicacion, direccion é intensidad de las fuerzas 4
Representacion de las fuerzas 5
Equilibrio .... id
Definicion y division de la Mecánica 6

CAPITULO II.

Leyes del movimiento.

§ 1. ° —MOVIMIENTO UNIFORME.

Página

Ley única..6

§ 2. ° —MOVIMIENTO VARIADO.

Leyes del movimiento uniformemente variado..........7

CAPITULO III.

Medida de las fuerzas por las aceleraciones.

Axioma..11
Corolarios..12
Teorema I..id
Corolarios..id
Teorema II..13
Corolario..id
Resultante, componentes..14

CAPITULO IV.

Composicion y resolucion de las fuerzas.

§ 1. ° —COMPOSICION DE LAS FUERZAS.

Teorema I..14
Teorema II..15

Página

Teorema III.......................16
Teorema IV........................id
Composicion de varias fuerzas. Polígono de las fuerzas..17
Teorema V.........................id
Par de fuerzas....................19
Composicion de un sistema cualquiera de fuerzas paralelas..........................20
Centro de las fuerzas paralelas...id

§ 2.° —RESOLUCION DE LAS FUERZAS.

Resolucion de una fuerza aplicada á un punto, en dos fuerzas.......................21
Resolucion de una fuerza aplicada á un punto, en tres no situadas en el mismo plano..........id
Resolucion de una fuerza, en dos fuerzas paralelas.....id
Construccion gráfica..............22

CAPITULO V.

Pesantez, centro de gravedad, equilibrio.

§ 1.° —PESANTEZ.

Definicion de la pesantez.........23
Direccion de la pesantez..........24
Peso..............................25
Densidad..........................26
Relacion entre los pesos y los volúmenes y entre los volúmenes y las densidades........id

§ 2.° —CENTRO DE GRAVEDAD.

Definicion del centro de gravedad...27

Página

Determinacion del centro de gravedad..............27

§ 3.° —EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS.

Condiciones del equilibrio de los cuerpos.............29
Base de sustentacion..............................31
Diferentes estados de equilibrio... 32
Paradoja dinámica 34

CAPITULO VI.

Leyes de la caida de los cuerpos. Péndulo.

§ 1.° —LEYES DE LA CAIDA DE LOS CUERPOS.

Ley 1.ª...34
Ley 2.ª...36
Ley 3.ª...37
Comprobacion de la 2.ª y 3.ª ley....... ....id
Fórmulas de la pesantez...........................42

§ 2.° —PÉNDULO.

Definicion del péndulo............................42
Leyes del péndulo y su fórmula....................44
Péndulo compuesto.... 46
Medida de la intensidad de la pesantez...............48

CAPITULO VII.

Movimiento curvilíneo.

Definicion..49
Movimiento parabólico .... id
Movimiento circular 50

Página

Cálculo de las fuerzas centrales.......................51
Valor de la atraccion terrestre.......................53

CAPITULO VIII.

Choque de los cuerpos.

Definicion 54
Cuerpos no elásticos..............................55
Cuerpos elásticos..................................56
Choque oblícuo 58
Leyes del choque oblícuo.........................59
Observacion......................................60

CAPITULO IX.

Teoria de las máquinas al estado de equilibrio.

§ 1.°—DEFINICIONES.

Definicion y division de las máquinas.................60

§ 2.°—PALANCA.

Definicion, diversos géneros de palanca..............62
Ejemplos..id
Condiciones de equilibrio de una palanca.............63
Usos de la palanca................................64
Cuestiones..id
Balanza 66
Condiciones de una buena balanza.....................id
Métodos de pesar con exactitud.......................69

§ 3.° —POLEA Ó GARRUCHA.

Página
Definicion 70
Condiciones de equilibrio de la polea.................71
Polipastos.......................................72
Usos de la polea..................................73
Cuestiones ....id

§ 4.° —TORNO.

Definicion 74
Condicion de equilibrio del torno......................75
Ruedas dentadas y su condicion de equilibrio..........id
Usos del torno 76
Cuestiones ....id

§ 5.° —PLANO INCLINADO.

Definicion.......................................77
Condiciones de equilibrio del plano inclinado..........78
Usos del plano inclinado............................79
Cuestiones.......................................id

§ 6.° —TORNILLO Ó ROSCA.

Definicion 81
Condiciones de equilibrio del tornillo................ 82
Tornillo sin fin...................................id
Usos del tornillo..................................83
Cuestiones.......................................id

§ 7.° —CUÑA.

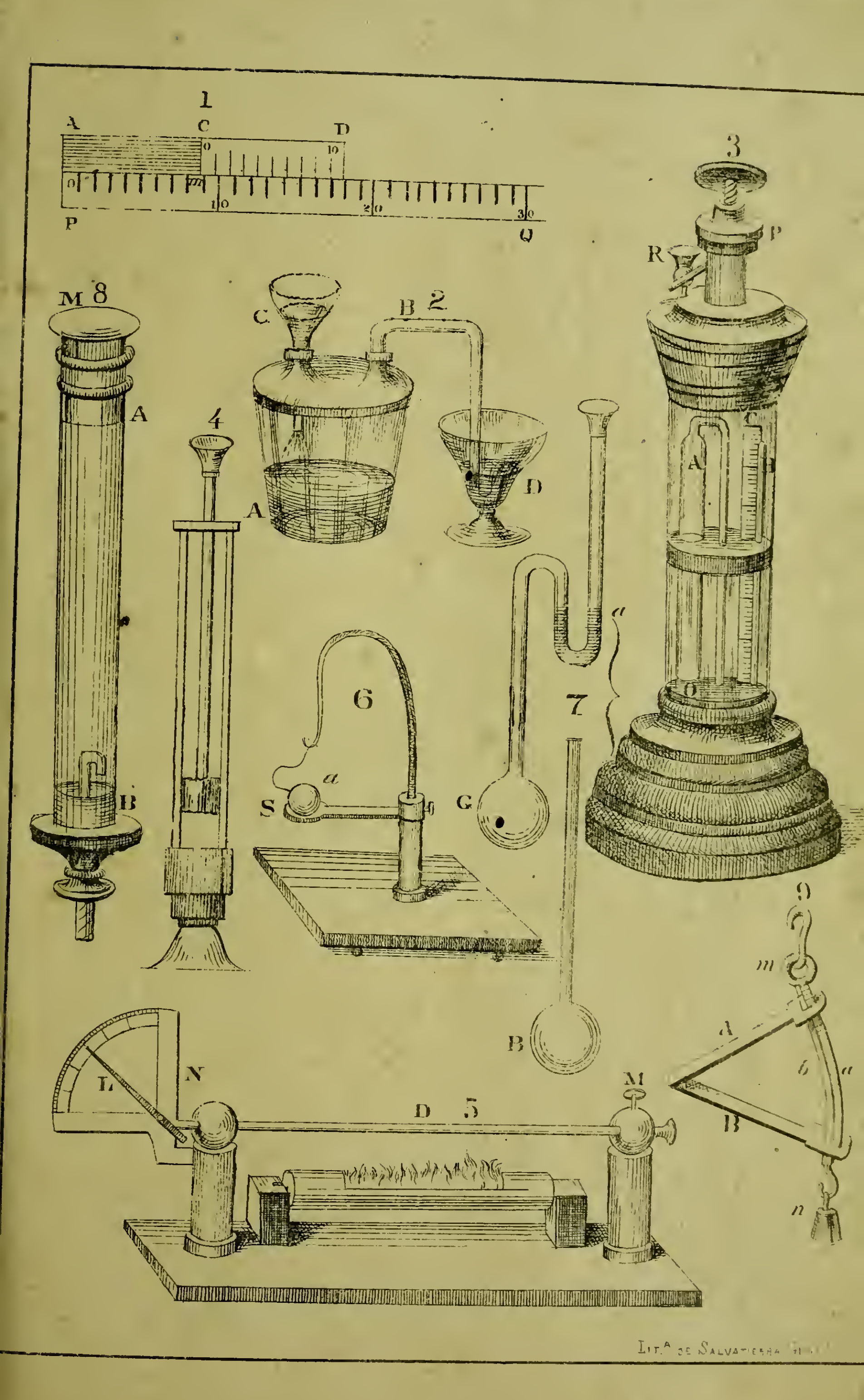
Página
Definicion 84
Condicion de equilibrio de la cuña....................id
Otra disposicion de la cuña..........................85
Usos de la cuña.....................................id
Cuestiones...86

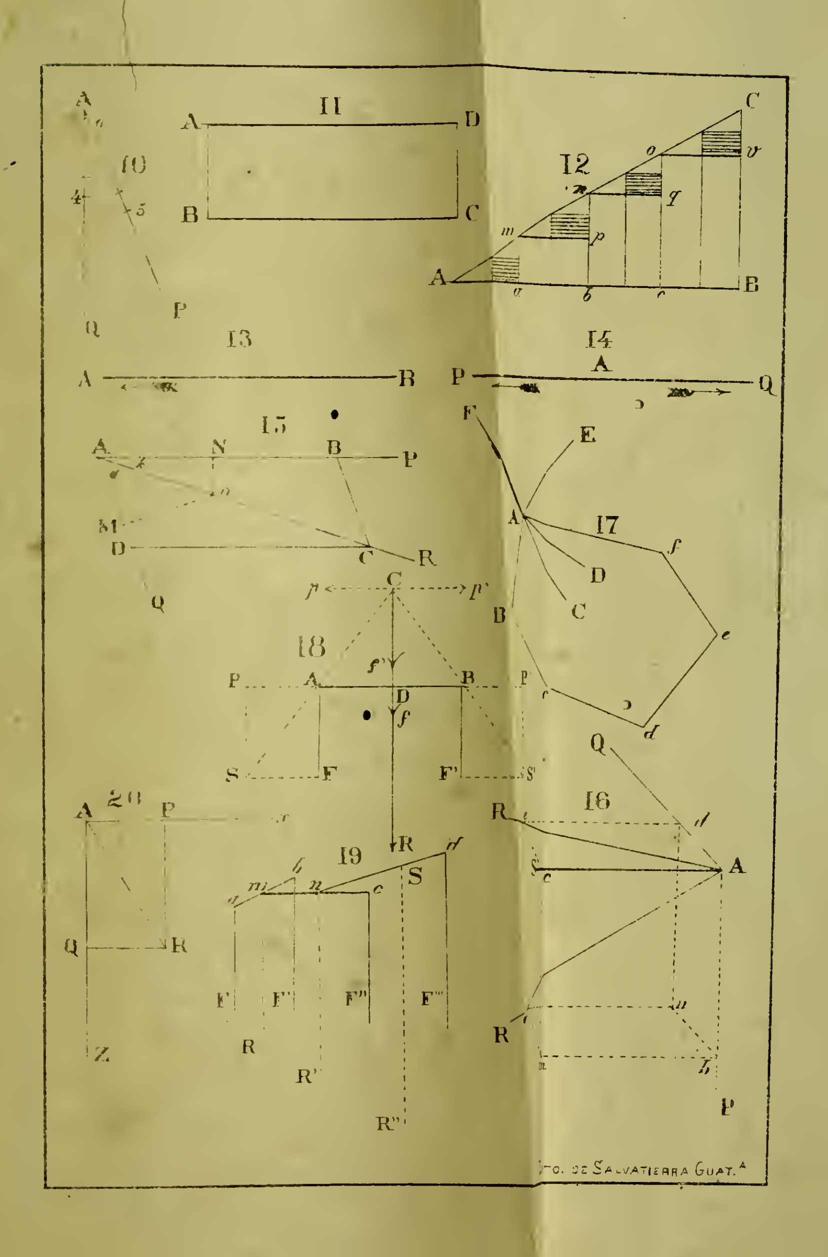
CAPITULO X.

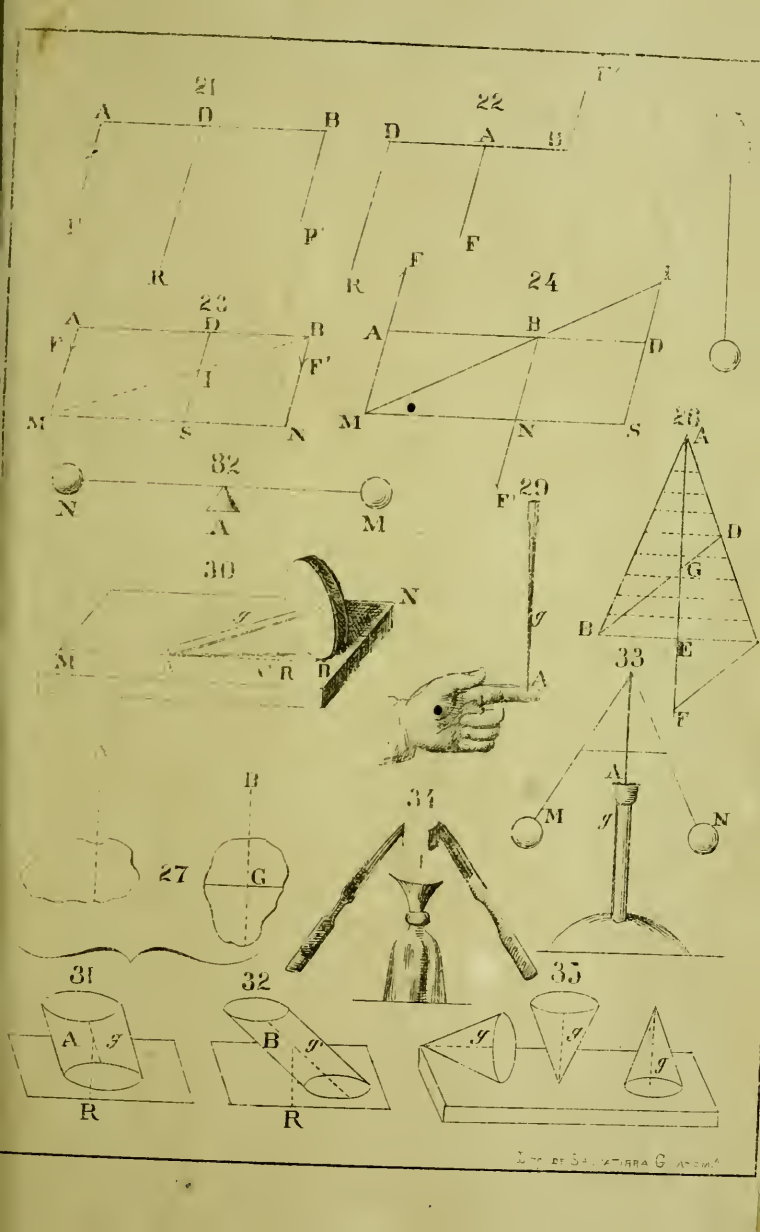
Máquinas al estado de movimiento uniforme.

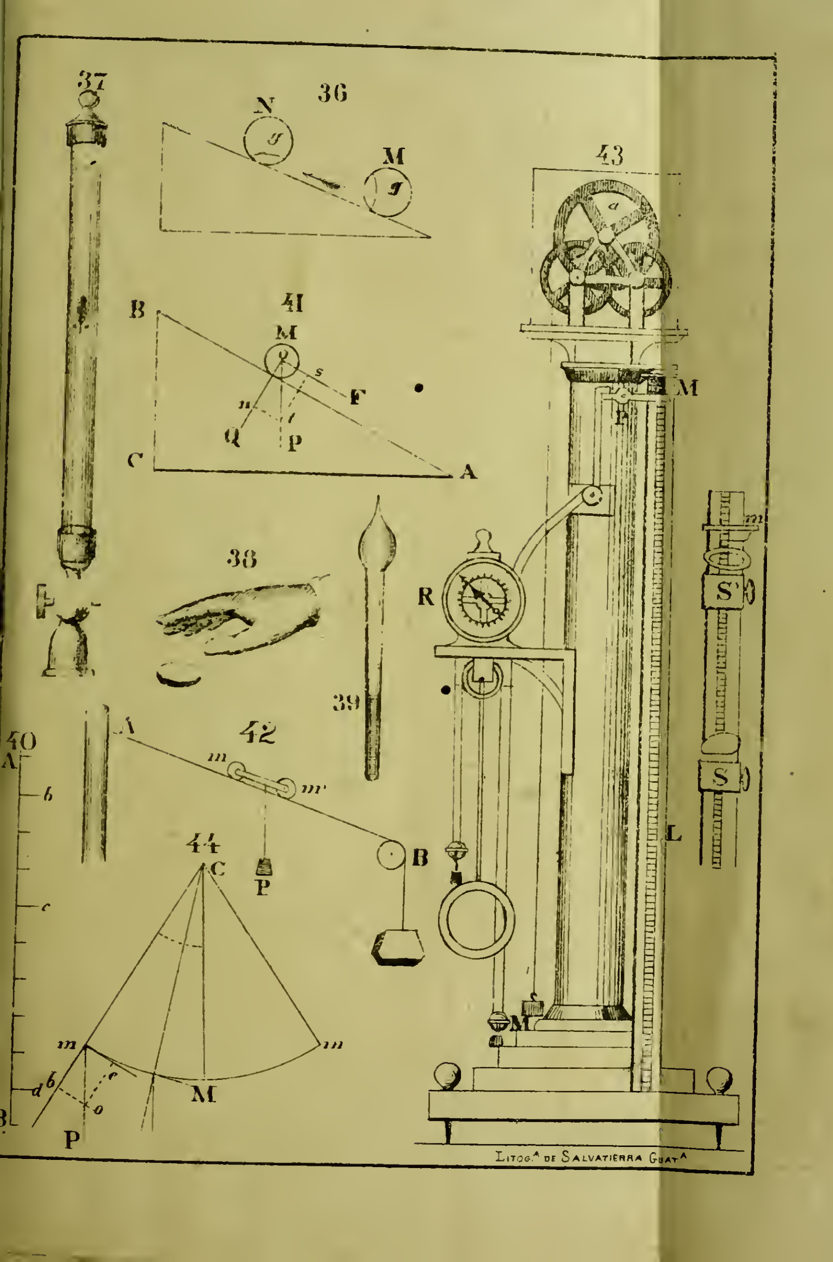
Trabajo de una fuerza..............................87
Unidad de trabajo...................................90
Principio de las velocidades virtuales...................id

Errata notable.—Página 55, dice "Cuerpos elásticos," léase: "Cuerpos *no* elásticos."

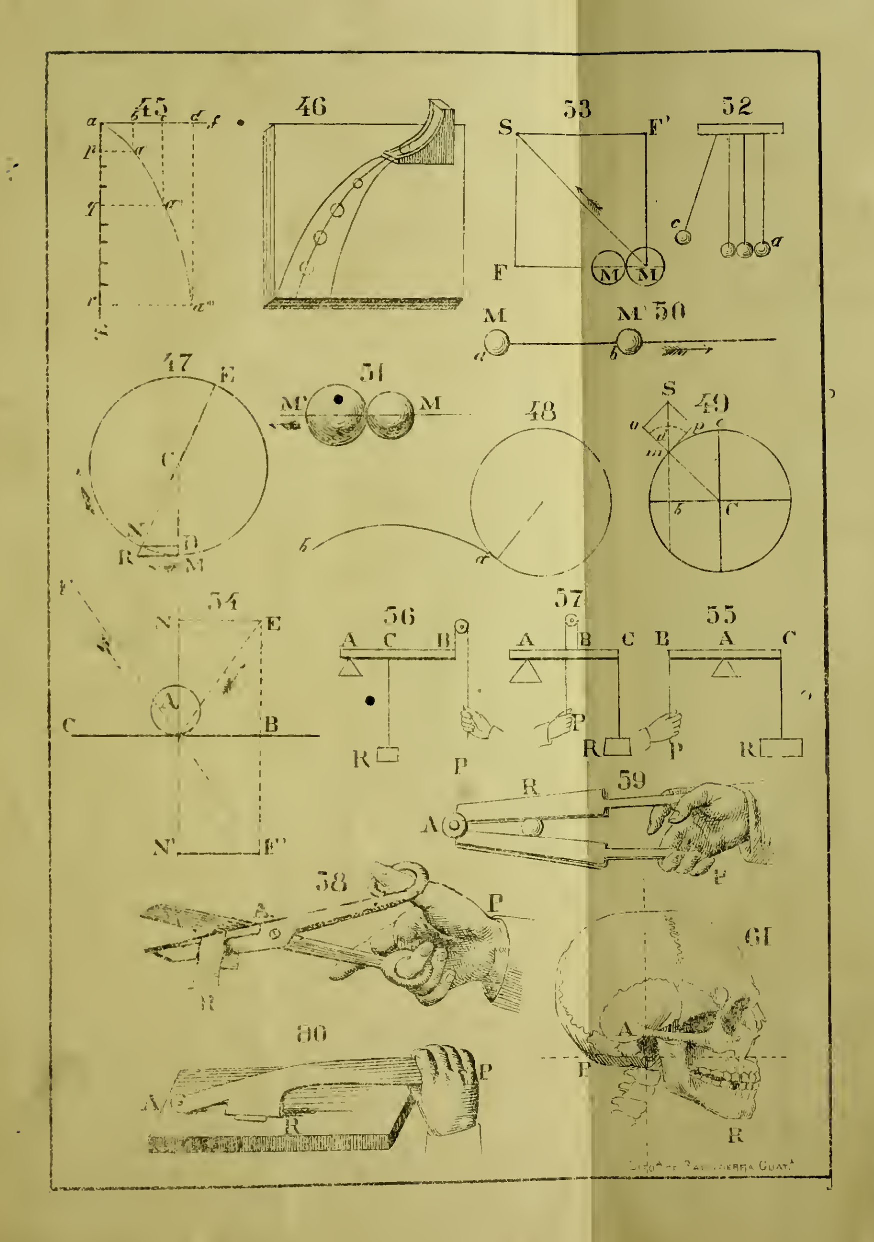

1
A
C
D
0
10
0
m
10
20
30
P
Q
3
P
R
A
C
B
O
a
8
M
A
B
4
A
2
B
C
D
6
a
S
7
G
B
9
m
A
b
a
B
n
5
L
N
D
M
LIT.A DE SALVATIERRA

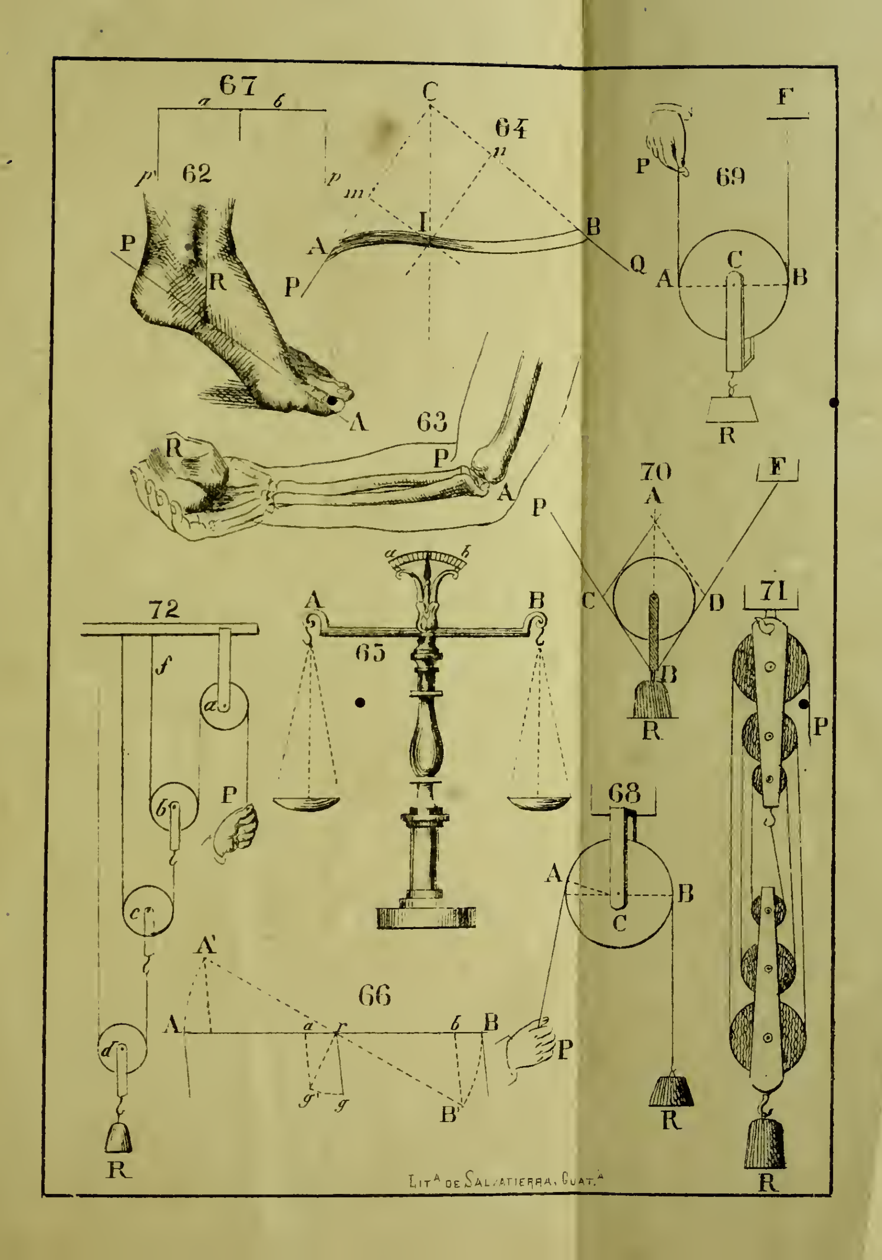

10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
Lito. de Salvatierra Guat.a


21
A
D
B
P'
R
22
D
A
R
F
24
I
M
N
S
23
F'
S
82
N
M
30
N
M
29
g
26
G
E
33
27
G
34
31
g
32
35

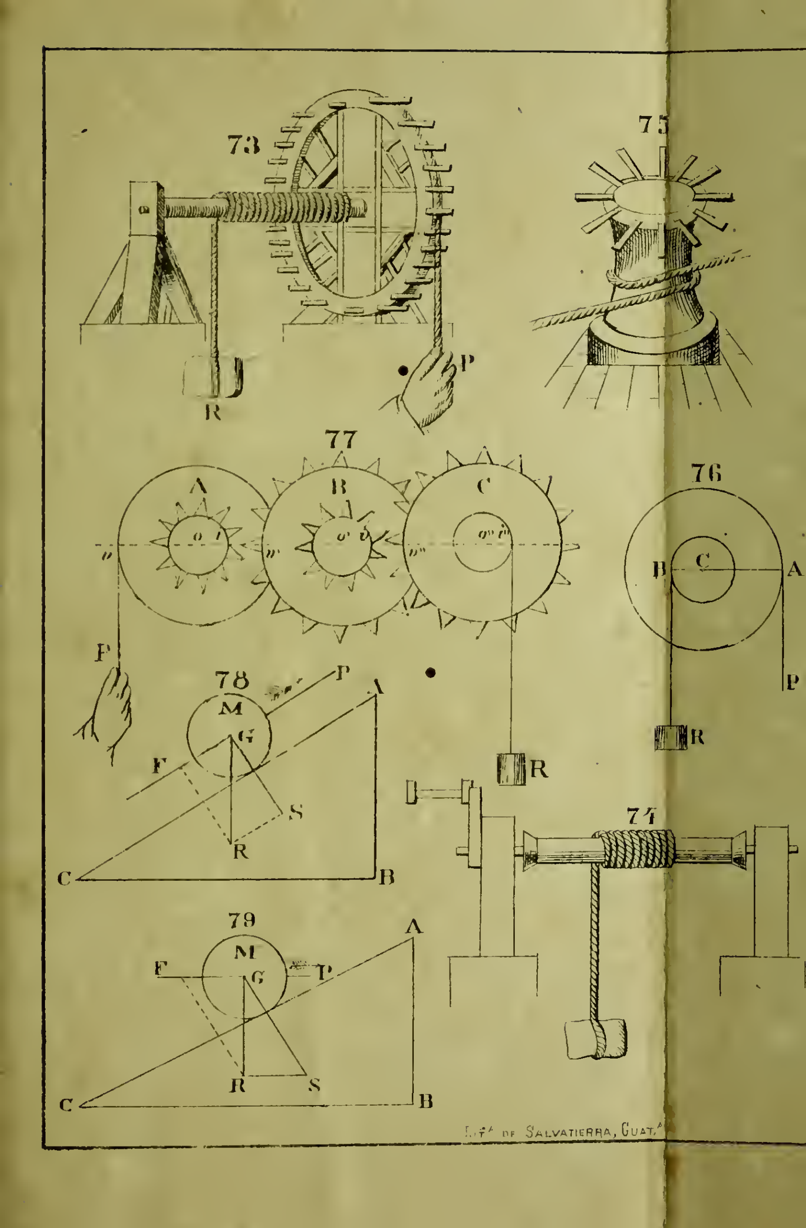


37
36
N
M
43
B
41
M
F
Q
P
C
A
M
38
R
39
40
A
42
B
44
C
P
L
S
M
P
Litog.a de Salvatierra Guat.a

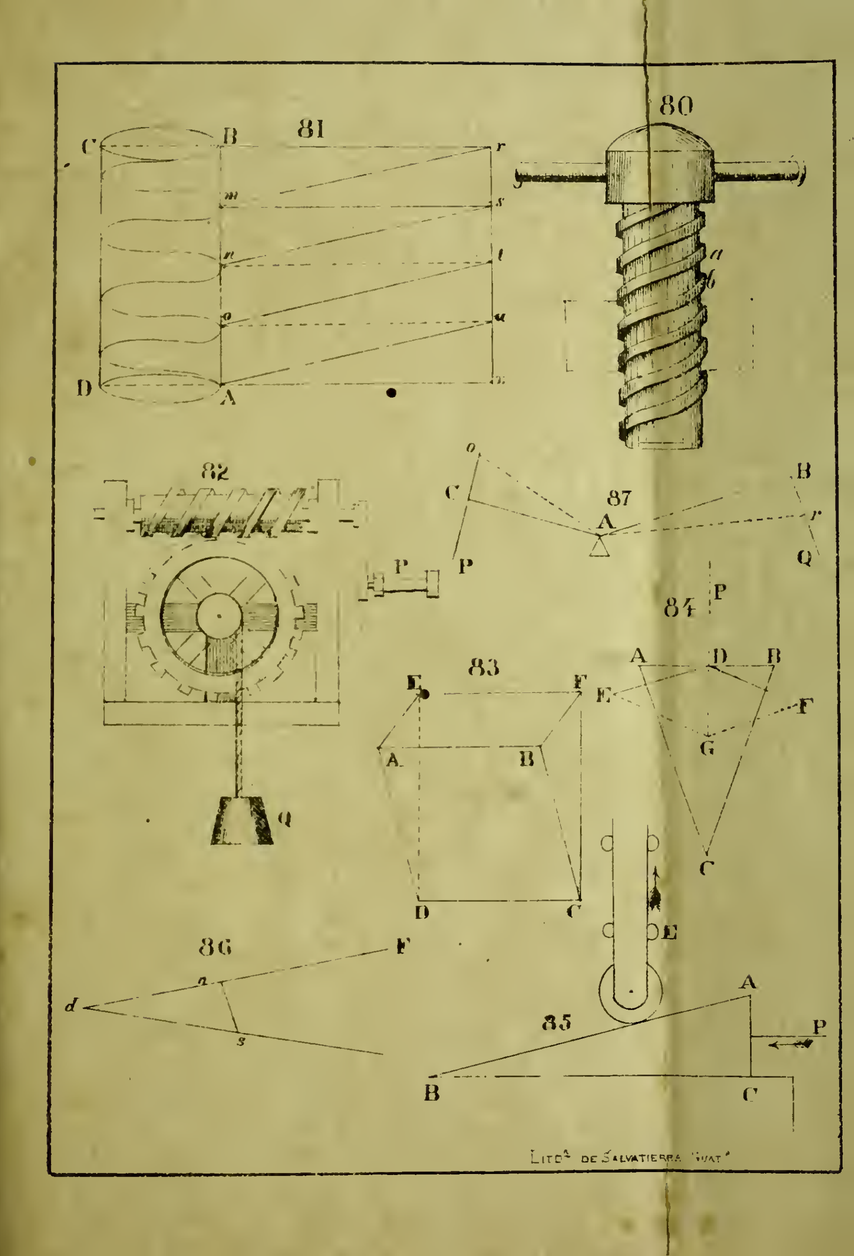

45
46
53
52
50
47
51
48
49
54
56
57
55
59
58
61
60



67
62
64
69
63
70
72
65
68
71
66
LIT.A DE SALVATIERRA, GUAT.A



73
a
R
P
75
77
A
B
C
P
R
76
B
C
A
P
R
78
M
G
P
A
F
S
R
C
B
74
79
M
F
G
P
A
R
S
C
B
Litª de Salvatierra, Guatª


80
81
C
B
r
m
s
n
t
o
u
D
A
a
b
82
Q
P
o
C
87
A
B
r
Q
P
84
P
83
E
F
A
B
D
C
A
D
B
E
F
G
C
E
86
F
d
a
s
85
A
P
B
C
LITOª DE SALVATIERRA GUATª